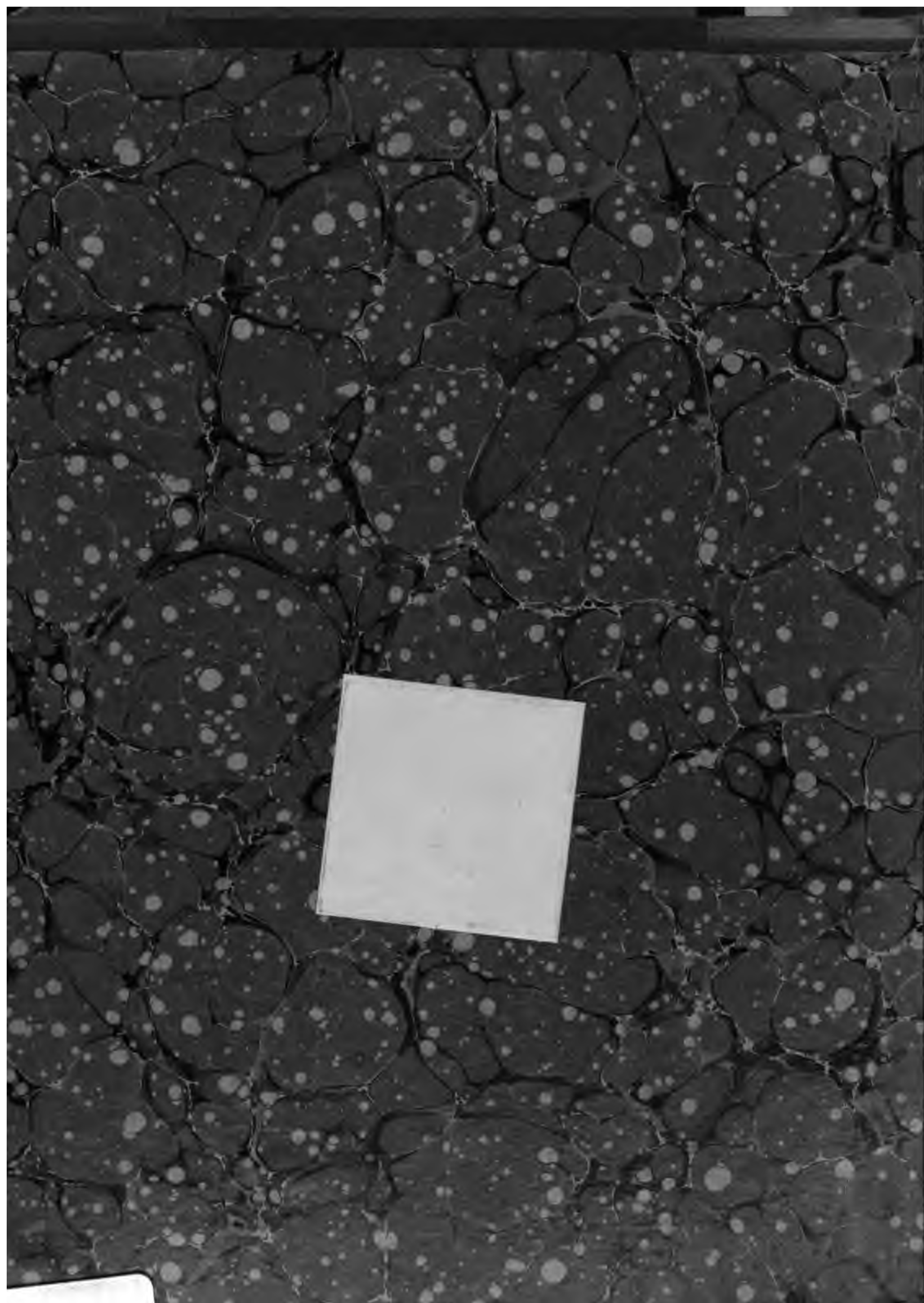
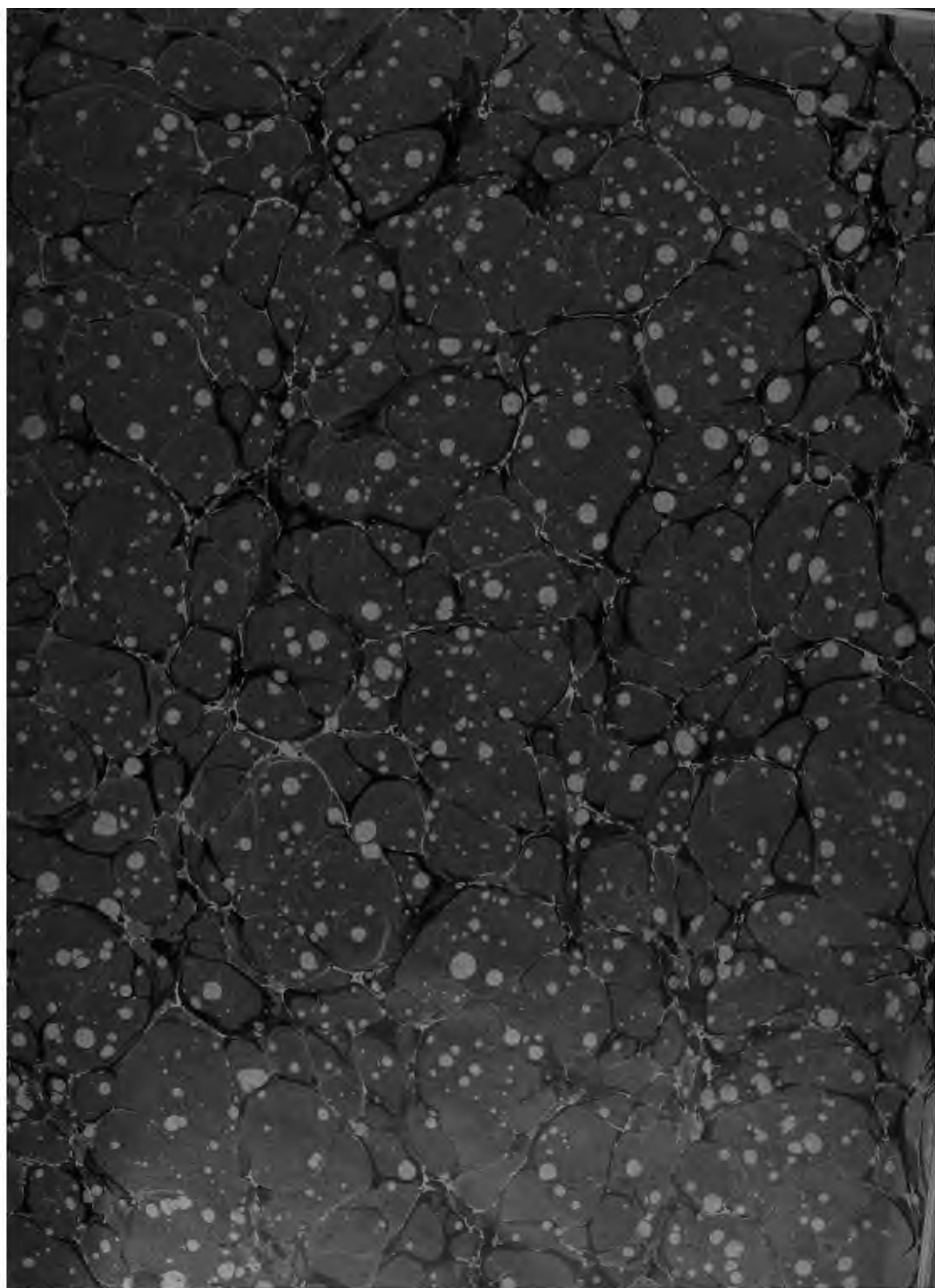

Stanford University Libraries
3 6105 000 820 592





ACTA

MATHEMATICA

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

23

STOCKHOLM
BEIJERS BOKFÖRLAGSAKTIEBOLAG.
1900.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
PRINZ LOUIS FERDINANDSTRASSE 2.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE.

REDACTION

INHALTSVERZEICHNISS. — TABLE DES MATIÈRES.

BAND 23. — 1900. — TOME 23.

Seite. Pages

FREDHOLM, IVAR. Sur les équations de l'équilibre d'un corps solide élastique ... 1— 42

HENSEL, K. Über eine neue Theorie der algebraischen Functionen zweier Variablen ... 339—416

HESSENBERG, GERHARD. Über die Invarianten linearer und quadratischer binärer Differentialformen und ihre Anwendung auf die Deformation der Flächen ... 121—170

HORN, J. Über die irregulären Integrale der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten ... 171—202

KÖNIGSBERGER LEO. Sur les principes de la mécanique. Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur (traduit de l'allemand par L. Laugel) ... 63— 80

KÖNIGSBERGER, LEO. Sur les principes de la mécanique. Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur (traduit par L. Laugel) ... 81— 84

MITTAG-LEFFLER, G. Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène (première note) ... 43— 62

PETERSEN, JULIUS. Quelques remarques sur les fonctions entières ... 85— 90

Inhaltsverzeichniss. — Table des matières.

Seite. Pages.

PICARD, ÉMILE. Sur une classe de transcendantes nouvelles (second mémoire) .... 333—338

RIQUIER, CH. Sur une question fondamentale du calcul intégral .... 203—332

VAHLEN, KARL THEODOR. Über Fundamentalsysteme für symmetrische Functionen .... 91—120

SUR LES ÉQUATIONS DE L'ÉQUILIBRE D'UN CORPS SOLIDE ÉLASTIQUE

PAR

IVAR FREDHOLM
à STOCKHOLM.

On connait le rôle fondamental que joue l'intégrale particulière $\frac{1}{r}$ de l'équation $\Delta u = 0$ dans la théorie du potentiel. On connait de même des intégrales particulières des équations d'équilibre d'un corps élastique isotrope, qui pour cette partie de la théorie de l'élasticité jouent un rôle tout à fait analogue à celui de la fonction $\frac{1}{r}$ dans la théorie du potentiel. Les dites intégrales particulières ont pour caractère commun la propriété d'être homogènes du degré -1 et d'avoir un seul point singulier réel à distance finie.

Il est naturel de se proposer la question s'il existe des intégrales particulières des équations de l'équilibre d'un corps cristallisé quelconque, jouissant des mêmes propriétés que la fonction $\frac{1}{r}$.

J'espère d'avoir donné une réponse satisfaisante de cette question par les résultats suivants.

Dans le premier chapitre j'ai donné une formule représentant toutes les intégrales homogènes du degré -1 et analytiques, d'une équation aux dérivées partielles et à coefficients constants. En donnant aux éléments arbitraires dans cette formule des valeurs convenables, on trouve que les équations différentielles de la forme $f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)u = 0$, où f est une forme définie, admettent toujours un certain nombre d'intégrales qui sont régulières pour tout système réel des variables, le système $x = y = z = 0$ seul excepté.

A l'aide de ces intégrales je déduis, dans le second chapitre, du théorème connu de BETTI une formule permettant d'exprimer les composantes de déformation à l'intérieur d'un corps, si on se donne ces composantes à la surface ainsi que les forces agissant sur la surface.

La dite formule se compose de trois espèces d'intégrales, parfaitement analogues aux intégrales qui représentent, dans la théorie du potentiel, les potentiels d'une masse étendue à trois dimensions, d'une couche simple et d'une couche double. Dans le troisième chapitre on trouvera une étude de ces intégrales.

Dans le même chapitre j'ai de plus démontré que l'on pourra exprimer toute intégrale homogène de degré négatif entier des équations d'équilibre, qui est régulière pour des valeurs réelles, comme fonction linéaire des dérivées des intégrales régulières du degré — 1. Ensuite j'ai montré quelle est la signification physique des intégrales homogènes du degré — 1, et j'ai résolu le problème d'équilibre d'un milieu élastique infiniment grand, non déformé à l'infini.

CHAPITRE I.

§ 1. *Les solutions homogènes du degré — 1 des équations différentielles linéaires à coefficients constants.*

Les fonctions homogènes du degré — 1, satisfaisant à une équation différentielle linéaire homogène et à coefficients constants

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)u = 0, \tag{1}$$

peuvent s'obtenir de l'intégrale particulière

$$u = \frac{1}{\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3},$$

en formant l'expression

$$(2) \qquad u = \int \frac{\psi(\xi, \eta) d\xi}{f_2(\xi, \eta)(\xi x_1 + \eta x_2 + x_3)}.$$

Dans cette formule les variables sont liées l'un à l'autre par la relation

$$f(\xi, \eta) = f(\xi, \eta, 1) = 0,$$

$f_2(\xi, \eta)$ désigne la dérivée $\frac{\partial f}{\partial \eta}$, et $\psi(\xi, \eta)$ est une fonction entière rationnelle en η du degré $n - 1$, n étant le degré de f, par rapport à ξ elle sera une fonction analytique.

Cela posé, nous faisons sur $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ les hypothèses:

1. que le coefficient de ξ_2^n soit différent de zéro,

2. que les facteurs de f, si elle est réductible, soient tous inégaux.

En vertu de l'hypothèse 1 nous pourrons écrire

$$f(\xi, \eta) = f_0 \eta^n + f_1 \eta^{n-1} + \dots + f_n,$$

où f_0 est certainement différent de zéro. En vertu de la seconde hypothèse les racines $\eta_1 \dots \eta_n$ de l'équation $f(\xi, \eta) = 0$ seront en général inégales.

Substituons maintenant ces racines successivement pour η dans l'expression (2) et faisons la somme des résultats, nous aurons une fonction symétrique des racines η, dont on obtient l'expression en fonction de ξ seul de la manière suivante.

Décomposons en des fractions simples la fonction rationnelle de η

$$\frac{\psi(\xi, \eta)}{f(\xi, \eta)(\xi x_1 + \eta x_2 + x_3)}.$$

Pourvu que la variable ξ ait une valeur telle que les racines η_ν de l'équation $f(\xi, \eta) = 0$ soient tous inégales, on obtient

$$(3) \qquad \frac{\psi(\xi, \eta)}{f(\xi, \eta)(\xi x_1 + \eta x_2 + x_3)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\psi(\xi, \eta_\nu)}{f_2(\xi, \eta_\nu)(\xi x_1 + \eta_\nu x_2 + x_3)} \cdot \frac{1}{\eta - \eta_\nu}$$
$$+ \frac{\psi(\xi, \eta_0)}{f(\xi, \eta_0)(\xi x_1 + \eta x_2 + x_3)},$$

où η_0 est déterminé par l'équation $\xi x_1 + \eta_0 x_2 + x_3 = 0$.

Développons maintenant les deux membres de l'équation (3) suivant les puissances négatives de η et écrivons que les coefficients de $\frac{1}{\eta}$ sont égaux, nous aurons l'expression cherchée

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\psi(\xi, \eta_\nu)}{f_2(\xi, \eta_\nu)(\xi x_1 + \eta_\nu x_2 + x_3)} = -\frac{\psi(\xi, \eta_0)}{x_2 f(\xi, \eta_0)}. \tag{4}$$

Posons maintenant

$$\psi(\xi, \eta) = k_1\eta^{n-1} + k_2\eta^{n-2} + \dots + k_n,$$

avec les valeurs suivantes des coefficients k:

$$(5) \qquad \begin{aligned} k_1 &= f_0\psi_1, \\ k_2 &= f_1\psi_1 + f_0\psi_2, \\ &\dots\dots\dots \quad \dots\dots \\ k_n &= f_{n-1}\psi_1 + f_{n-2}\psi_2 + \dots + f_0\psi_n, \end{aligned}$$

où les ψ désignent des fonctions analytiques indéterminées.

En formant maintenant l'intégrale définie

$$u = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\psi(\xi, \eta_0)}{x_2 f(\xi, \eta_0)} d\xi, \tag{6}$$

où le contour fermé C ne doit contenir d'autres points singuliers que les racines de l'équation $f(\xi, \eta_0) = 0$, on obtient une intégrale homogène du degré -1 de l'équation (1), comme cela résulte évidemment de l'équation (4). Nous allons démontrer qu'on pourra choisir les fonctions indéterminées ψ_ν de manière que les n premiers coefficients du développement de u suivant les puissances croissantes de x_2 seront égaux aux n coefficients correspondants dans le développement d'une fonction homogène du degré -1.

En développant la fonction $-\frac{\psi(\xi, \eta)}{x_2 f(\xi, \eta)}$ suivant les puissances décroissantes de η on trouve

$$\frac{\psi(\xi, \eta)}{x_2 f(\xi, \eta)} = -\frac{1}{x_2}\left(\frac{\psi_1}{\eta} + \frac{\psi_2}{\eta^2} + \dots + \frac{\psi_n}{\eta^n} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\psi_{n+\nu}}{\eta^{n+\nu}}\right). \tag{7}$$

Ce développement converge, pourvu qu'on ait donné à η une valeur satisfaisant à l'inégalité $|\eta| > R$, où R désigne la valeur absolue de la plus grande racine en η de l'équation $f(\xi, \eta) = 0$.

Soit $\xi = -\frac{x_3}{x_1}$ un point régulier pour les fonctions $\psi_1(\xi) \ldots \psi_n(\xi)$ et choisissons pour contour d'intégration un cercle C avec le point $-\frac{x_3}{x_1}$ comme centre et avec un rayon ρ assez petit pour que C ne contienne aucun point singulier des fonctions ψ. Supposons cette condition vérifiée si $\rho < \delta$ et posons $\xi = -\frac{x_3}{x_1} + \rho e^{\theta i}$, d'où il vient $\eta_0 = -\frac{x_1}{x_2}\rho e^{\theta i}$.

Parce que les racines de l'équation $f(\xi, \eta_0) = 0$ pour $x_2 = 0$ deviennent tous égales à $-\frac{x_3}{x_1}$, on pourra choisir x_2 assez petit pour que le cercle C contienne toutes ces racines, et qu'en même temps le module de η_0 soit plus grand que R.

Les conditions précédentes étant vérifiées, on pourra intégrer les deux membres de l'équation (7), ce qui nous donne le résultat

$$
(8) \quad \begin{aligned} u &= -\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\psi(\xi, \eta_0)}{x_2 f(\xi, \eta_0)} d\xi \\ &= \frac{1}{x_1}\psi_1\left(-\frac{x_3}{x_1}\right) - \frac{x_2}{x_1^2}\psi_2'\left(-\frac{x_3}{x_1}\right) + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x_2^{n-1}}{\underline{|n-1}\, x_1^n}\psi_n^{(n-1)}\left(-\frac{x_3}{x_1}\right) + \ldots \end{aligned}
$$

Mais ici le coefficient de x_2^ν: $\frac{(-1)^\nu}{\underline{|\nu}} \frac{1}{x_1^{\nu+1}} \psi_{\nu+1}^{(\nu)}\left(-\frac{x_3}{x_1}\right)$ est une fonction homogène des variables x_3 et x_1 du degré $-(\nu + 1)$, qu'on pourra choisir arbitrairement si $\nu \leqq n - 1$.

Donc, la formule (6) nous donne bien toute intégrale homogène du degré -1 de l'équation (1) qui est développable suivant les puissances croissantes de x_2.

Comme on peut toujours faire un changement linéaire de variables de manière qu'une fonction, de l'espèce considérée ici, soit régulière pour $x_2 = 0$ et que l'hypothèse 1 soit vérifiée en même temps, on peut considérer comme résolu le problème de trouver les intégrales homogènes et analytiques du degré -1 de l'équation (1). Toutefois il reste une restriction, à savoir l'hypothèse 2. Mais il est aisé de voir que cette

restriction n'a aucune importance. Car l'expression (6), satisfaisant identiquement à l'équation (1), ne cesse pas à satisfaire à la même équation, si la fonction $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ par hasard a un facteur multiple. De plus le développement (8) a la même forme encore dans ce cas, et les coefficients des n premiers termes sont des fonctions arbitraires.

La formule (6) est ainsi toujours l'expression de l'intégrale cherchée.

On doit observer que les intégrales, dont nous avons donné l'expression sous forme d'intégrale définie, peuvent se présenter sous une forme débarrassée de tout signe d'intégration. Car, en se servant de l'équation (4), on peut aisément effectuer l'intégration dans la formule (8) et on trouve pour expression de u la somme suivante de résidus

$$u = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\psi(\xi_\nu, \eta_\nu)}{x_1 f_2(\xi_\nu, \eta_\nu) - x_2 f_1(\xi_\nu, \eta_\nu)}, \tag{9}$$

où ξ_ν, η_ν désignent les coordonnées des points d'intersection des lignes

$$f(\xi, \eta) = 0, \qquad \xi x_1 + \eta x_2 + x_3 = 0,$$

et f_1 et f_2 sont définies par les formules

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial \xi}, \qquad f_2 = \frac{\partial f}{\partial \eta}.$$

En se servant des coordonnées homogènes ξ_1, ξ_2, ξ_3 à la place de ξ et de η on peut donner à u une forme plus symétrique. Posons $f_\nu = \frac{\partial f}{\partial \xi_\nu}$, il vient

$$nf(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = f_1\xi_1 + f_2\xi_2 + f_3\xi_3 = 0.$$

Comme nous avons

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 = 0,$$

on déduit, en introduisant trois constantes k_1, k_2, k_3,

$$\frac{\xi_1}{x_2 f_3 - x_3 f_2} = \frac{\xi_2}{x_3 f_1 - x_1 f_3} = \frac{\xi_3}{x_1 f_2 - x_2 f_1} = \frac{k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3}{\begin{vmatrix} k_1, & k_2, & k_3 \\ x_1, & x_2, & x_3 \\ f_1, & f_2, & f_3 \end{vmatrix}}.$$

Pour que la dernière expression ne soit pas illusoire, il faut que les k satisfassent à l'inégalité

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3 \neq 0.$$

Par introduction des expressions $\xi = \frac{\xi_1}{\xi_3}$ et $\eta = \frac{\xi_2}{\xi_3}$ on trouve

$$\frac{\psi(\xi, \eta)}{x_1 f_2 - x_2 f_1} = \frac{\xi_3 \xi_3^{n-2} \psi\left(\frac{\xi_1}{\xi_3}, \frac{\xi_2}{\xi_3}\right)}{x_1 f_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) - x_2 f_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}$$
$$= \frac{\psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)(k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3)}{\begin{vmatrix} k_1, & k_2, & k_3 \\ x_1, & x_2, & x_3 \\ f_1, & f_2, & f_3 \end{vmatrix}},$$

où l'on a désigné par $\psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ la fonction homogène du degré $n-2$ $\xi_3^{n-2}\psi\left(\frac{\xi_1}{\xi_3}, \frac{\xi_2}{\xi_3}\right)$. L'expression de u à l'aide des coordonnées homogènes devient donc

$$(10) \qquad u = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\psi(\xi_1^\nu, \xi_2^\nu, \xi_3^\nu)(k_1\xi_1^\nu + k_2\xi_2^\nu + k_3\xi_3^\nu)}{\begin{vmatrix} k_1, & k_2, & k_3 \\ x_1, & x_2, & x_3 \\ f_1^\nu, & f_2^\nu, & f_3^\nu \end{vmatrix}},$$

$\xi_1^\nu, \xi_2^\nu, \xi_3^\nu$ étant les coordonnées des points d'intersection des lignes

$$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0, \qquad x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 = 0,$$

et $f_a^\nu = f_a(\xi_1^\nu, \xi_2^\nu, \xi_3^\nu)$.

Afin d'obtenir une expression symétrique de u en forme d'intégrale définie il convient d'exprimer la variable ξ dans la formule (6) par une variable auxiliaire s de la manière suivante.

Définissons ξ_1, ξ_2 et ξ_3 en fonction de s par l'équation

$$(11) \qquad k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3 = \begin{vmatrix} k_1, & k_2, & k_3 \\ x_1, & x_2, & x_3 \\ a_1 s + b_1, & a_2 s + b_2, & a_3 s + b_3 \end{vmatrix},$$

qui doit être vérifiée quelles que soient les quantités k_ν.

Nous supposons que les a_ν et les b_ν soient des constantes arbitraires réelles mais indépendantes des k_ν.

Pour $k_\nu = x_\nu$ la formule (11) nous donne

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 = 0.$$

De l'expression $\xi = \frac{\xi_1}{\xi_3}$ il vient $\eta_0 = \frac{\xi_2}{\xi_3}$ et

$$d\xi = \frac{\xi_3 d\xi_1 - \xi_1 d\xi_3}{\xi_3^2},$$

expression qui prend, après un calcul facile, la forme

$$d\xi = -\frac{x_2}{\xi_3^2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} ds,$$

ou, si nous désignons le déterminant par (x, a, b),

$$d\xi = -\frac{x_2}{\xi_3^2}(x, a, b)ds.$$

En introduisant ces expressions des ξ, η_0 et $d\xi$ dans la formule (6) on trouve enfin

$$u = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)(a, b, x)}{f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} ds. \tag{12}$$

Par rapport à cette formule nous faisons les remarques suivantes. Le contour C doit contenir du moins une des racines de l'équation $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$, autrement u serait nul.

Supposons qu'on ait fixé un contour d'intégration C. Alors il est clair qu'on pourra faire varier les constantes arbitraires a_ν et b_ν d'une manière continue sans que cela ait aucune influence sur la valeur de u, pourvu que, pendant cette variation, aucun des zéros de $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ne traverse le contour C.

Il est clair qu'on pourra aussi faire varier les x_ν sous la même condition, sans que l'intégrale (12) cesse de représenter la même fonction analytique.

En particulier, supposons que le contour C soit l'axe des s réelles et que f soit une forme définie. Alors deux systèmes de valeurs des constantes a_ν, b_ν donnent la même valeur à u, si on peut passer de l'un système à l'autre par variation continue, sans rencontrer de système pour lequel il y a des racines réelles de l'équation $f = 0$. Mais s'il y a une racine réelle en s de l'équation $f = 0$, les valeurs correspondantes des ξ_1, ξ_2, ξ_3 seront $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$; dans ce cas l'équation (11) nous donne, en y posant $k_\nu = a_\nu$,

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3 = (a, b, x) = 0.$$

La condition $(a, b, x) = 0$ est ainsi nécessaire pour que $f = 0$ ait une racine réelle en s.

En supposant de plus que $\phi(-x_1, -x_2, -x_3) = \phi(x_1, x_2, x_3)$, cherchons quelle sera la valeur de $u(x_1, x_2, x_3)$, quand on change le signe des variables x_1, x_2, x_3. Parce qu'on ne peut passer du point (x_1, x_2, x_3) au point $(-x_1, -x_2, -x_3)$ sans rencontrer des valeurs pour lesquelles on a $(a, b, x) = 0$, il est nécessaire de faire varier les quantités a_ν, b_ν en même temps que les x_ν. Supposons par exemple que les valeurs des quantités a_ν, b_ν soient telles que (a, b, x) conserve la valeur 1 pendant que (x_1, x_2, x_3) passe du point (x_1, x_2, x_3) au point $(-x_1, -x_2, -x_3)$. Comme alors les fonctions ϕ et f ne changent pas de signe, on aura

$$u(-x_1, -x_2, -x_3) = u(x_1, x_2, x_3).$$

§ 2. *Le cas où $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ est une forme définie.*

Supposons que la forme $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ soit une forme définie, c'est à dire que l'équation

$$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$$

n'admette pas de solution réelle autre que la solution évidente

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0.$$

Nous allons démontrer, dans ce cas, qu'il se trouve parmi les intégrales homogènes du degré -1 un certain nombre jouissant de la propriété

d'être holomorphes dans le voisinage de tout point réel, l'origine seulement excepté.

Les fonctions considérées ici étant homogènes, il suffit de démontrer que nos fonctions sont régulières pour toutes les valeurs réelles satisfaisant à la condition

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

De l'équation (11) on tire, en donnant aux quantités k_1, k_2, k_3 les valeurs a_1, a_2, a_3,

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3 = (a, b, x),$$

d'où l'on conclut que la distance du point ξ_1, ξ_2, ξ_3 à l'origine n'est jamais moindre que

$$r = \frac{|(a, b, x)|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

Supposons, ce qui est toujours possible, les nombres a_ν, b_ν choisis de manière que r soit plus grand qu'une quantité donnée différente de zéro, soit d. En appelant μ le minimum de $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ pour les valeurs réelles satisfaisant à l'équation

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1,$$

on peut affirmer que le minimum de $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ pour des valeurs réelles de s n'est pas moindre que μd^n.

Alors l'équation $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ n'admet aucune racine réelle en s. De plus, le coefficient de s^n dans cette équation étant

$$f\left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \right),$$

on pourra toujours choisir a_1, a_2, a_3 de manière que ce coefficient sera en valeur absolue plus grand qu'une quantité positive donnée, soit A. Les autres coefficients étant toujours finis, il est clair qu'on pourra décrire du point $s = 0$ comme centre un cercle C avec un rayon ρ indépendant de x_1, x_2, x_3 et assez grand pour que toutes les racines en s de l'équation $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ soient intérieures à C.

Prenons maintenant pour contour d'intégration dans la formule (12) un demi-cercle C_1 avec le rayon ρ_1 plus grand que ρ ayant le diamètre

sur l'axe des s réelles et l'origine pour centre. Alors je dis que la fonction $u(x_1, x_2, x_3)$ définie par l'équation

$$u = \int_{C_1} \frac{\psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)(a, b, x)}{f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} ds,$$

où ψ désigne une fonction entière rationnelle et homogène du degré $n-2$, n'aura pas de singularités réelles.

On voit maintenant que la valeur absolue de $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, quand s parcourt la partie curviligne de C_1, ne descend jamais au dessous de la quantité $A(\rho_1 - \rho)^n$. Soit m le plus petit des nombres μd^n et $A(\rho_1 - \rho)^n$; alors m est une limite inférieure des valeurs absolues que prend $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ quand s décrit le contour C_1. Cela posé, on peut trouver deux nombres h et $m_1 < m$ de manière que l'inégalité

$$|f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3, s) - f(x_1, x_2, x_3, s)| \leqq m_1$$

soit vérifiée pour tous les h_ν satisfaisant aux inégalités

(13) $$|h_\nu| < h. \qquad (\nu=1,2,3)$$

Dans l'inégalité précédente on a désigné $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ par $f(x_1, x_2, x_3, s)$.

Maintenant il est facile de voir que le développement de $\frac{(a, b, x)\psi}{f}$ suivant les puissances croissantes des h_ν converge pour tous les h_ν satisfaisant aux inégalités (13). Posons

(14) $$\frac{(a, b, x)\psi}{f} = \sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} \Phi_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} h_1^{\lambda_1} h_2^{\lambda_2} h_3^{\lambda_3},$$

et soit G une limite supérieure des valeurs de $(a, b, x)\psi$ pour les valeurs des variables considérées. Nous avons montré que la valeur absolue de $f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3)$ n'est pas moindre que $m - m_1$, par suite on trouve

$$|\Phi_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}| < \frac{G}{m - m_1} \frac{1}{h^{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}}.$$

Le développement (14) étant ainsi uniformément convergent, on a le droit d'écrire

(15) $$u = \int_{C_1} \frac{(a, b, x)\psi}{f} ds = \sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} h_1^{\lambda_1} h_2^{\lambda_2} h_3^{\lambda_3} \int_{C_1} \Phi_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} ds.$$

Il s'en suit que la fonction u est développable dans le voisinage d'un point réel quelconque x_1, x_2, x_3 satisfaisant à l'équation $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ et que ce développement converge pour tous les h_ν qui sont moindres que h. Soit ce développement

$$u = \sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} u_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} h_1^{\lambda_1} h_2^{\lambda_2} h_3^{\lambda_3},$$

le développement de u autour d'un point x_1, x_2, x_3 satisfaisant à l'égalité $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$ s'écrit

$$u = \sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} \frac{u_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}{r^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}} h_1^{\lambda_1} h_2^{\lambda_2} h_3^{\lambda_3} \tag{16}$$

et converge par suite, si les h_ν satisfont à l'inégalité

$$|h_\nu| < h\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \tag{17}$$

et a fortiori si $\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2} < h\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Il importe d'observer que le développement (16) est aussi uniformément convergent, si on le considère comme fonction des variables réelles x_1, x_2, x_3 assujetties à la condition

$$\frac{1}{h}\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2} < \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

car dans ce cas encore chaque terme du développement de u est inférieur en valeur absolue au terme correspondant d'une série convergente dont les termes sont indépendants des termes dans le développement de u.

§ 3. *Application à un système d'équations différentielles.*

Dans la suite nous aurons en particulier besoin des intégrales homogènes du degré -1 de deux systèmes d'équations différentielles, à savoir

(18 a) $\quad \sum_{\mu=1}^{3} \Delta_{\mu\lambda} u_\mu = 0, \qquad$ (18 b) $\quad \sum_{\lambda=1}^{3} \Delta_{\lambda\mu} v_\lambda = 0.$

où les $\Delta_{\lambda\mu}$ désignent des symboles d'opération de la forme

$$\Delta_{\lambda\mu} = \sum_{\alpha\beta} \binom{\lambda\mu}{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta}, \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

où $\binom{\lambda\mu}{\alpha\beta}$ désigne un coefficient constant.

Nous aurons les intégrales cherchées de la manière suivante. Eliminons soit entre les équations (18 a) ou (18 b) deux des inconnues, nous obtenons une équation différentielle qui peut s'écrire sous forme symbolique

$$\begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{vmatrix} v = 0.$$

Cette équation différentielle est linéaire, homogène du sixième ordre et à coefficients constants. Appelons f la fonction qu'on obtient en remplaçant dans le déterminant les signes d'opération $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$ par des variables ξ_1, ξ_2, ξ_3.

D'après ce qui précède les intégrales cherchées seront représentées par les formules

$$(19) \qquad v_a = \frac{1}{\pi} \int\limits_C \frac{(a, b, x)\psi_a}{f} ds = \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{6} \int\limits_C \frac{\psi_a(\xi, \eta_\nu) d\xi}{f_2(\xi, \eta_\nu)(\xi x_1 + \eta_\nu x_2 + x_3)},$$

où il ne s'agit que de déterminer les fonctions ψ.

En introduisant les expressions (19) dans les équations (18 b), on trouve

$$\sum_{\nu=1}^{6} \int\limits_C \frac{\Delta^\nu_{1\mu}\psi_1 + \Delta^\nu_{2\mu}\psi_2 + \Delta^\nu_{3\mu}\psi_3}{f_2(\xi, \eta_\nu)(\xi x_1 + \eta_\nu x_2 + x_3)^2} d\xi = 0, \qquad (\mu = 1, 2, 3)$$

où les $\Delta^\nu_{\lambda\mu}$ désignent les fonctions qu'on obtient en remplaçant dans les $\Delta_{\lambda\mu}$ $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$ par $\xi, \eta_\nu, 1$ respectivement.

On voit qu'on satisfait aux équations précédentes en prenant pour les ψ des fonctions du quatrième degré dépendant de trois constantes arbitraires et définies par les formules

$$\psi_1 = \begin{vmatrix} k_1 & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ k_2 & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ k_3 & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{vmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{vmatrix} \Delta_{11} & k_1 & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & k_2 & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & k_3 & \Delta_{33} \end{vmatrix}, \quad \psi_3 = \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & k_1 \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & k_2 \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & k_3 \end{vmatrix}.$$

Prenons enfin pour contour d'intégration C le demi-cercle défini dans le numéro précédent, les formules (19) représenteront des intégrales du système (18 b) dont le seul point singulier réel à distance finie est le point $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Désignons par $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ les intégrales ainsi obtenues. Maintenant on aura immédiatement les intégrales analogues du système (18 a) en échangeant entre eux dans les expressions des ψ les indices des Δ. Appelons ces intégrales $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Il résulte de la formule (10) § 1 que ces intégrales α et β sont des fonctions algébriques.

CHAPITRE II.

La méthode de Green.

§ 1. *Démonstration d'un théorème fondamental.*

Considérons un corps élastique quelconque. Soient u_1, u_2, u_3 les composantes du déplacement d'un point du corps, x_1, x_2, x_3 les coordonnées rectangulaires du même point dans l'état naturel. Alors on sait que le potentiel des forces intérieures s'exprime à l'aide d'une forme quadratique définie des six variables

$$\partial_{\nu\nu} = \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\nu}, \qquad \partial_{\lambda\mu} = \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\mu} + \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\lambda}. \qquad (\lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3)$$

Soit f cette forme, dS l'élément de volume S du corps considéré, le dit potentiel est égal à l'intégrale $\int f dS$, étendue sur le volume S.

En appliquant le principe des vitesses virtuelles on s'imaginee nu autre déformation, dont les composantes seront v_1, v_2, v_3 et on considère l'intégrale $\int \Delta dS$, où Δ est la forme bilinéaire

$$\Delta = \frac{\partial f}{\partial \delta_{11}}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial \delta_{22}}\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial \delta_{33}}\frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial \delta_{23}}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial f}{\partial \delta_{31}}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial f}{\partial \delta_{12}}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right).$$

La considération de l'intégrale $\int \Delta dS$ nous conduira au théorème fondamental, dont la démonstration fait l'objet de ce paragraphe.

J'observe d'abord que la forme Δ est loin d'être la forme bilinéare la plus générale qu'on puisse former avec les dérivées premières des fonctions u et v. Cependant, comme les théorèmes que j'ai l'intention de démontrer subsistent encore dans le cas général, je suppose, que Δ soit une forme bilinéaire quelconque des premières dérivées des fonctions u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3. Posons pour abréger

$$u_{\mu\beta} = \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\beta}, \qquad v_{\lambda\alpha} = \frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\alpha}.$$

Nous exprimons la forme Δ par la formule

$$(2) \qquad \Delta = \sum_{\lambda\mu\alpha\beta} \binom{\lambda\mu}{\alpha\beta} v_{\lambda\alpha} u_{\mu\beta}, \qquad (\lambda, \mu, \alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

où le symbole $\binom{\lambda\mu}{\alpha\beta}$ désigne une constante et chacun des indices prend les valeurs 1, 2, 3 indépendamment des autres.

Nous supposons que les six fonctions u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 et leurs dérivées des deux premiers ordres soient des fonctions continues dans un certain domaine réel D.

Introduisons des quantités $T_{\lambda\alpha}$ et $\mathfrak{T}_{\mu\beta}$ définies par les formules

$$T_{\lambda\alpha} = \frac{\partial \Delta}{\partial v_{\lambda\alpha}}, \qquad \mathfrak{T}_{\mu\beta} = \frac{\partial \Delta}{\partial u_{\mu\beta}}.$$

Prenons dans l'intérieur du domaine D un volume S limité par une surface ω, possédant un plan tangent déterminé en chaque point. Soit $d\omega$ l'élément de ω.

Des identités

$$\Delta = \sum_{\lambda\alpha} T_{\lambda\alpha} v_{\lambda\alpha} = \sum_{\mu\beta} \mathfrak{T}_{\mu\beta} u_{\mu\beta}$$

on déduit maintenant d'une manière bien connue deux expressions de l'intégrale $\int\limits_S \Delta\, dS$

(3)
$$\int\limits_S \Delta\, dS$$
$$= \int\limits_\omega \sum\nolimits_\lambda v_\lambda \sum\nolimits_\alpha T_{\lambda\alpha} \cos(nx_\alpha) d\omega - \int\limits_S \sum\nolimits_\lambda v_\lambda \sum\nolimits_\alpha \frac{\partial T_{\lambda\alpha}}{\partial x_\alpha} dS$$

et

$$\int\limits_\omega \sum\nolimits_\mu u_\mu \sum\nolimits_\beta \mathfrak{T}_{\mu\beta} \cos(nx_\beta) d\omega - \int\limits_S \sum\nolimits_\mu u_\mu \sum\nolimits_\beta \frac{\partial \mathfrak{T}_{\mu\beta}}{\partial x_\beta} dS,$$

où n désigne la normale extérieure de la surface ω et $\cos(nx_\alpha)$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ ses cosinus directeurs.

De l'équation (1) on tire les expressions des $T_{\lambda\alpha}$ et $\mathfrak{T}_{\mu\beta}$

(4)
$$T_{\lambda\alpha} = \sum_{\mu\beta} \binom{\lambda\mu}{\alpha\beta} u_{\mu\beta} = \sum_{\mu=1}^{3} \left[\binom{\lambda\mu}{\alpha 1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \binom{\lambda\mu}{\alpha 2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \binom{\lambda\mu}{\alpha 3} \frac{\partial}{\partial x_3} \right] u_\mu,$$
$$\mathfrak{T}_{\mu\beta} = \sum_{\lambda\alpha} \binom{\lambda\mu}{\alpha\beta} v_{\lambda\alpha} = \sum_{\lambda=1}^{3} \left[\binom{\lambda\mu}{1\beta} \frac{\partial}{\partial x_1} + \binom{\lambda\mu}{2\beta} \frac{\partial}{\partial x_2} + \binom{\lambda\mu}{3\beta} \frac{\partial}{\partial x_3} \right] v_\lambda,$$

d'où il vient

(5)
$$\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial T_{\lambda\alpha}}{\partial x_\alpha} = \sum_{\alpha\beta\mu} \binom{\lambda\mu}{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u_\mu}{\partial x_\alpha \partial x_\beta},$$
$$\sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial \mathfrak{T}_{\mu\beta}}{\partial x_\beta} = \sum_{\alpha\beta\lambda} \binom{\lambda\mu}{\alpha\beta} \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}.$$

Si l'on introduit maintenant les signes d'opération

(6)
$$\Delta_{\lambda\mu} = \sum_{\alpha\beta} \binom{\lambda\mu}{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta},$$

(7)
$$\Delta^\alpha_{\lambda\mu} = \binom{\lambda\mu}{\alpha 1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \binom{\lambda\mu}{\alpha 2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \binom{\lambda\mu}{\alpha 3} \frac{\partial}{\partial x_3},$$
$$\nabla^\beta_{\lambda\mu} = \binom{\lambda\mu}{1\beta} \frac{\partial}{\partial x_1} + \binom{\lambda\mu}{2\beta} \frac{\partial}{\partial x_2} + \binom{\lambda\mu}{3\beta} \frac{\partial}{\partial x_3}$$

on pourra écrire les formules (4) et (5)

$$(8) \qquad T_{\lambda\alpha} = \Sigma_\mu \Delta^\alpha_{\lambda\mu} u_\mu, \qquad \mathfrak{T}_{\mu\beta} = \Sigma_\lambda \nabla^\beta_{\lambda\mu} v_\lambda,$$

$$(9\text{ a}) \qquad \sum\nolimits_\alpha \frac{\partial T_{\lambda\alpha}}{\partial x_\alpha} = \Sigma_\mu \Delta_{\lambda\mu} u_\mu,$$

$$(9\text{ b}) \qquad \sum\nolimits_\beta \frac{\partial \mathfrak{T}_{\mu\beta}}{\partial x_\beta} = \Sigma_\lambda \Delta_{\lambda\mu} v_\lambda.$$

Maintenant je suppose que les fonctions u_λ et v_λ satisfassent aux systèmes d'équations différentielles

$$(10) \qquad \Sigma_\mu \Delta_{\lambda\mu} u_\mu = U_\lambda, \qquad \Sigma_\lambda \Delta_{\lambda\mu} v_\lambda = V_\mu,$$

où les lettres U_λ et V_μ désignent des fonctions continues et uniformes. En formant maintenant la différence des expressions (3) j'obtiens, en ayant égard aux équations (10), l'équation

$$(11) \qquad \int\limits_S \Sigma_\rho (U_\rho v_\rho - V_\rho u_\rho) dS$$
$$= \int\limits_\omega \left\{ \Sigma_\lambda v_\lambda \Sigma_\alpha T_{\lambda\alpha} \cos(nx_\alpha) - \Sigma_\lambda u_\lambda \Sigma_\alpha \mathfrak{T}_{\lambda\alpha} \cos(nx_\alpha) \right\} d\omega.$$

En posant pour abréger

$$T_\lambda = \Sigma_\alpha T_{\lambda\alpha} \cos(nx_\alpha), \qquad \mathfrak{T}_\lambda = \Sigma_\alpha \mathfrak{T}_{\lambda\alpha} \cos(nx_\alpha),$$

on peut écrire la formule (11) sous la forme

$$(12) \qquad \int\limits_S \Sigma_\rho (U_\rho v_\rho - V_\rho u_\rho) dS = \int\limits_\omega \Sigma_\lambda (v_\lambda T_\lambda - u_\lambda \mathfrak{T}_\lambda) d\omega.$$

Cette formule est l'expression du théorème fondamental, qui pour les systèmes (10) joue le même rôle que le théorème de Green pour l'équation de Laplace. Dans le cas particulier, où Δ est la variation du potentiel intérieur d'un corps élastique, le théorème fondamental est identique au théorème connu de Betti.

§ 2. *Application de la méthode de Green aux systèmes* $\Sigma_\mu \Delta_{\lambda\mu} u_\lambda = U_\mu, \quad \Sigma_\lambda \Delta_{\lambda\mu} v_\lambda = V_\mu.$

Soient u_1, u_2, u_3 trois fonctions satisfaisant aux équations

$$\sum_{\mu=1}^{3} \Delta_{\lambda\mu} u_\mu = U_\lambda,$$

et supposons que les conditions de continuité du § 1 soient vérifiées. En prenant pour les fonctions v les fonctions $\beta_\mu(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0)$ nous pourrons appliquer la formule (12) du § 1 à condition d'exclure du domaine d'intégration S la partie à l'intérieur d'une surface fermée ω'. Nous supposons que ω' soit une sphère avec le rayon arbitrairement petit r et avec le point $A(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ comme centre. Soient $\sigma_{\lambda a}$ et σ_λ les fonctions déduites des fonctions β de la même manière que les quantités $\mathfrak{T}_{\lambda a}$ et $\mathfrak{T}_\lambda$ des fonctions v. Appelons S' le domaine S moins la sphère ω'. Alors l'application de la formule (12) nous donne

$$\text{(13)} \qquad \int\limits_{\omega} \Sigma_\rho(\beta_\rho T_\rho - u_\rho \sigma_\rho) d\omega + \int\limits_{\omega'} \Sigma_\rho(\beta_\rho T_\rho - u_\rho \sigma_\rho) d\omega' = \int\limits_{S'} \Sigma_\rho U_\rho \beta_\rho dS'.$$

Faisons maintenant décroître le rayon r, l'intégrale

$$\int\limits_{\omega'} \sum_\rho \beta_\rho T_\rho d\omega'$$

converge évidemment vers zéro, parce que les intégrales β_ρ sont des fonctions homogènes du degré -1 et T_ρ reste finie pour $r = 0$.

Voyons ce que deviendra l'autre partie de l'intégrale appartenant à la sphère ω'. Il suffit de considérer l'intégrale

$$J_1 = \int u_1(\sigma_{11} \cos(nx_1) + \sigma_{12} \cos(nx_2) + \sigma_{13} \cos(nx_3)) d\omega'$$

où n désigne la normale extérieure au volume S', c'est à dire la normale intérieure à la sphère ω'. Désignons par $\sigma'_{a\beta}$ la valeur de la fonction

homogène du degré — 2 $\sigma_{\alpha\beta}$ sur la surface d'une sphère au rayon 1 concentrique avec ω', et l'élément de surface de cette sphère par $d\omega_1$. Alors les valeurs de la fonction $\sigma_{\alpha\beta}$ en deux points sur le même rayon, l'un sur ω' et l'autre sur ω, sont liées par la formule

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{r^2}\sigma'_{\alpha\beta}$$

et on a de plus

$$d\omega' = r^2 d\omega_1.$$

Ainsi on peut écrire

$$J_1 = \int u_1 (\sigma'_{11}\cos(nx_1) + \sigma'_{12}\cos(nx_2) + \sigma'_{13}\cos(nx_3))d\omega_1.$$

Dans cette formule u_1 seul dépend de r. Posons $u_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = u_1^0$; à cause de la continuité de u_1 nous pourrons choisir r assez petit pour que $|u_1 - u_1^0|$ soit moindre qu'une quantité arbitrairement petite δ. Soit de plus g la plus grande valeur absolue de la quantité entre les parenthèses dans l'expression de J_1, il vient

$$\left| J_1 - u_1^0 \int_{\omega_1} (\sigma'_{11}\cos(nx_1) + \sigma'_{12}\cos(nx_2) + \sigma'_{13}\cos(nx_3))d\omega_1 \right|$$
$$= \int_{\omega_1} (u_1 - u_1^0)(\sigma'_{11}\cos(nx_1) + \sigma'_{12}\cos(nx_2) + \sigma'_{13}\cos(nx_3))d\omega_1$$
$$< \delta g \int d\sigma_1$$
$$< 4\pi\delta g,$$

c'est à dire

$$\lim_{r=0} J_1 = u_1^0 \int_{\omega'} \sigma_1 d\omega'.$$

Posons pour abréger

(14) $$L_\rho = \int_{\omega'} \sigma_\rho d\omega',$$

nous aurons

$$\lim_{r=0} \int_{\omega'} \Sigma_\rho u_\rho \sigma_\rho d\omega' = L_1 u_1^0 + L_2 u_2^0 + L_3 u_3^0.$$

L'intégrale dans le second membre de l'équation (13) conserve évidem-

ment une valeur finie, quand nous faisons tendre r vers zéro, car, en désignant par G et g les limites supérieures des $|U_\rho|$ et $|r\beta_\rho|$, nous aurons

$$\left|\int_S \Sigma_\rho U_\rho \beta_\rho dS'\right| < Gg \int_S \frac{dS'}{r}.$$

Mais on sait que l'intégrale dans le second membre conserve une valeur finie, quelque petit que soit r. Par conséquent il est loisible d'écrire

$$\lim_{r=0} \int_S \Sigma_\rho U_\rho \beta_\rho dS' = \int_S \Sigma_\rho U_\rho \beta_\rho dS.$$

Le résultat des tous ces passages à la limite s'exprime par la formule

$$(15) \qquad L_1 u_1^0 + L_2 u_2^0 + L_3 u_3^0 = \int_\omega \Sigma_\rho (\beta_\rho T_\rho - u_\rho \sigma_\rho) d\omega - \int_S \Sigma_\rho U_\rho \beta_\rho dS.$$

De même on obtient une formule analogue pour les fonctions v_μ, satisfaisant au système adjoint

$$\Sigma_\mu \Delta_{\mu\lambda} v_\mu = V_\lambda.$$

En désignant par τ_ρ la quantité analogue à σ_ρ déduite des intégrales α, et par M_ρ l'intégrale

$$M_\rho = \int_{\omega'} \tau_\rho d\omega', \qquad (\rho=1,2,3)$$

la formule s'écrit

$$(16) \qquad M_1 v_1^0 + M_2 v_2^0 + M_3 v_3^0 = \int_\omega \Sigma_\rho (\alpha_\rho \mathfrak{T}_\rho - v_\rho \tau_\rho) d\omega - \int_S \Sigma_\rho V_\rho \alpha_\rho dS.$$

Envisageons de plus le cas où le point $A(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ est situé à la surface ω, et supposons que la surface ω ait en A un plan tangent déterminé. Décrivons à cet effet, de A comme centre, la sphère ω' et appelons ν la partie de ω qui est à l'extérieur de la sphère ω'. Soit S' la partie de S qui est à l'extérieur de la sphère ω'. Appliquons le théorème de réciprocité au volume S', nous aurons, en appelant ω' la partie de la surface sphérique ω' qui est à l'intérieur de S:

$$\int_{\omega'} \Sigma_\rho (\beta_\rho T_\rho - u_\rho \sigma_\rho) d\omega' + \int_\nu \Sigma_\rho (\beta_\rho T_\rho - u_\rho \sigma_\rho) d\nu$$
$$= \int_{S'} \Sigma_\rho u_\rho \beta_\rho dS'.$$

On démontre, comme dans ce qui précède, que la limite de l'intégrale dans le second membre pour $r = 0$ est une quantité finie. De même on trouve la limite de la première intégrale

$$\lim_{r=0} \int_{\omega'} \Sigma(\beta_\rho T_\rho - u_\rho \sigma_\rho) d\omega' = - u_1^0 \int_{\omega'} \sigma_1 d\omega' - u_2^0 \int_{\omega'} \sigma_2 d\omega' - u_3^0 \int_{\omega'} \sigma_3 d\omega',$$

où les intégrales dans le second membre doivent être étendues à la partie de la surface sphérique ω' qui est du côté intérieur du plan tangent à ω au point A — le côté intérieur du plan tangent étant celui de la normale intérieure. Parce que les σ_ρ sont des fonctions paires quantités il s'en suit que la valeur de $\int \sigma_\rho d\omega'$ est égale à $\frac{1}{2} L_\rho$. On démontre aussi que la limite de l'intégrale

$$\int_v \Sigma_\rho(\beta_\rho T_\rho - u_\rho \sigma_\rho) dv$$

pour $r = 0$ est une quantité finie. Cette limite peut donc être exprimée par l'intégrale

$$\int_\omega \Sigma_\rho(\beta_\rho T_\rho - u_\rho \sigma_\rho) d\omega.$$

Nous sommes ainsi conduits à la formule

$$L_1 u_1^0 + L_2 u_2^0 + L_3 u_3^0 = 2 \int_\omega \Sigma_\rho(\beta_\rho T_\rho - u_\rho \sigma_\rho) d\omega - 2 \int_S \Sigma_\rho U_\rho \beta_\rho dS,$$

et de même à la formule analogue

$$M_1 v_1^0 + M_2 v_2^0 + M_3 v_3^0 = 2 \int_\omega \Sigma_\rho(\alpha_\rho \mathfrak{T}_\rho - v_\rho \tau_\rho) d\omega - 2 \int_S \Sigma V_\rho \alpha_\rho dS.$$

Enfin, si A est un point à l'extérieur du volume S je rappelle qu'on a

$$\int_\omega \Sigma_\rho(\beta_\rho T_\rho - u_\rho \sigma_\rho) d\omega - \int_S \Sigma_\rho U_\rho \beta_\rho dS = 0,$$

$$\int_\omega \Sigma_\rho(\alpha_\rho \mathfrak{T}_\rho - v_\rho \tau_\rho) d\omega - \int_S \Sigma_\rho V_\rho \alpha_\rho dS = 0,$$

car en ce cas aucun point singulier ne se trouve à l'intérieur de ω.

Dans le paragraphe suivant nous allons calculer les valeurs des coefficients L et M. Comme il en résultera que ces coefficients sont différents de zéro, les formules (15) et (16) permettent de calculer les valeurs des fonctions u et v dans l'intérieur d'un volume S, si nous connaissons les valeurs de ces fonctions et de certaines fonctions linéaires de leurs premières dérivées pour les points (x_1, x_2, x_3) appartenant à la surface ω.

En particulier ces formules s'appliquent à la théorie de l'équilibre d'un corps élastique cristallisé quelconque. Dans ce cas les quantités T_ρ désignent les composantes de pression à la surface du corps considéré. Nous reviendrons dans le dernier chapitre à cette application.

§ 3. *Calcul des coefficients* L *et* M.

Nous avons défini le coefficient L_ρ par la formule

$$L_\rho = \int_\omega \sigma_\rho d\omega,$$

où l'intégrale doit être étendue sur une certaine surface sphérique ω. En prenant cependant pour les fonctions u_λ des valeurs constantes, l'application de la formule (15) § 2 nous apprend que L_ρ est indépendant de la forme spéciale de la surface d'intégration, de sorte que ω peut être une surface fermée quelconque contenant l'origine, pourvu que par une déformation continue, elle puisse se ramener à la sphère ω. Prenons en particulier pour ω un cylindre C parallèle à l'axe des x_1 et dont les bases aient pour équations $x_1 = a$ et $x_1 = -a$. En appelant ds l'élément linéaire de l'intersection du cylindre C avec le plan des x_2, x_3, on pourra écrire l'expression de L_ρ

$$L_\rho = \int_s \int_{-a}^{+a} \sigma_\rho ds dx_1 + B,$$

où B est la somme des deux intégrales étendues sur les bases de C. Mais en appelant A l'aire du base et en désignant par σ_0 la plus grande valeur absolue de σ_ρ quand x_1 est égal à l'unité on a

$$|B| < \frac{2A\sigma_0}{a^2}.$$

Il s'en suit que $\lim B = 0$ pour a infini. Par suite on pourra écrire

$$L_\rho = \lim_{a=\infty} \int_s \int_{-a}^{+a} \sigma_\rho \, ds \, dx_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_s \sigma_\rho \, ds \, dx_1 .$$

Mais il est clair qu'on pourra choisir une quantité positive a_0 telle que les deux intégrales

$$\int_a^\infty \sigma_\rho dx_1 \, , \int_{-a}^{-\infty} \sigma_\rho dx_1$$

aient des valeurs moindres qu'une quantité arbitrairement petite si a est positive et plus grande que a_0. Il s'en suit que l'on a le droit d'intervertir l'ordre des intégrations dans la formule pour L_ρ. Calculons d'abord l'intégrale

$$J(a) = \int_{-a}^{+a} \sigma_\rho dx_1 .$$

Si nous supposons pour le moment que x_2 ait une valeur positive, nous pouvons employer l'expression de β_ν que nous avons donné dans le chapitre I, § 3:

$$\beta_\nu = \frac{1}{\pi} \int_C \sum_1^6 {}_a \frac{\psi_\nu(\xi, \eta_a) d\xi}{f_2(\xi, \eta_a)(\xi x_1 + \eta_a x_2 + x_3)},$$

où le contour C ne doit contenir que ceux des zéros de $\xi x_1 + \eta_a x_2 + x_3$ dont la partie imaginaire est positive. De cette expression de β_ν on déduit l'expression suivante de $\sigma_{\rho\nu}$ (voir § 1 form. (8))

$$(1) \qquad \sigma_{\rho\nu} = -\frac{1}{\pi} \int_C \sum_1^6 {}_a \frac{\Delta_{1\rho}^\nu \psi_1 + \Delta_{2\rho}^\nu \psi_2 + \Delta_{3\rho}^\nu \psi_3}{f_2(\xi, \eta_a)(\xi x_1 + \eta_a x_2 + x_3)^2} d\xi,$$

où les expressions $\Delta_{\mu\rho}^\nu$ désignent les fonctions linéaires en ξ et η qu'on obtient en remplaçant dans les expressions (7) § 1 les signes $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$ respectivement par ξ, η_a et 1.

Nous aurons par suite pour l'intégrale J une expression de la forme

$$(2) \qquad J(a) = -\frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} \int_C \sum_1^6 {}_a \frac{A_2^a \cos(nx_2) + A_3^a \cos(nx_3)}{f_2(\xi, \eta_a)(\xi x_1 + \eta_a x_2 + x_3)^2} d\xi dx_1 .$$

Désignons pour abréger $A_2^a \cos(n, x_2) + A_3^a \cos(n, x_3)$ par $\Phi(\xi, \eta_a)$, nous aurons en exécutant l'intégration par rapport à x_1 — ce qui est évidemment loisible —

$$J(a) = \frac{1}{\pi} \int_C \sum_1^6 {}_a \frac{2a\Phi(\xi, \eta_a) d\xi}{f_2(\xi, \eta_a)(a\xi + \eta_a x_2 + x_3)(-a\xi + \eta_a x_2 + x_3)}.$$

Mais dans cette formule il est aisé à effectuer l'intégration, ce qui nous donne le résultat

$$J(a) = i \sum_\nu \frac{4a\Phi(\xi_\nu, \eta_\nu) d\xi}{\left(a\frac{\partial f}{\partial \eta_\nu} - x_2 \frac{\partial f}{\partial \xi_\nu}\right)(-a\xi_\nu + \eta_\nu x_2 + x_3)}$$

$$+ i \sum_\nu \frac{4a\Phi(\xi'_\nu, \eta'_\nu)}{\left(-a\frac{\partial f}{\partial \eta'_\nu} - x_2 \frac{\partial f}{\partial \xi'_\nu}\right)(a\xi'_\nu + \eta'_\nu x_2 + x_3)},$$

où l'on doit donner aux ξ_ν, η_ν les valeurs satisfaisant aux équations

$$f(\xi, \eta) = 0, \qquad a\xi + \eta x_2 + x_3 = 0$$

et aux ξ'_ν, η'_ν les valeurs satisfaisant aux équations

$$f(\xi', \eta') = 0, \qquad -a\xi' + \eta' x_2 + x_3 = 0;$$

dans les deux cas ξ et ξ' doivent avoir ses parties imaginaires positives. A l'aide de ces équations linéaires on peut écrire l'expression de $J(a)$ comme il suit

$$J(a) = 2i \sum_\nu \frac{a\Phi(\xi_\nu, \eta_\nu)}{\left(a\frac{\partial f}{\partial \eta_\nu} - x_2 \frac{\partial f}{\partial \xi_\nu}\right)(\eta_\nu x_2 + x_3)} + 2i \sum_\nu \frac{a\Phi(\xi'_\nu, \eta'_\nu)}{\left(-a\frac{\partial f}{\partial \eta'_\nu} - x_2 \frac{\partial f}{\partial \xi'_\nu}\right)(\eta'_\nu x_2 + x_3)},$$

et nous aurons à chercher la limite de cette fonction pour $a = \infty$.

Puisque pour $a = \infty$ les lignes droites qui déterminent ξ, ξ', η, η' tendent vers la ligne $\xi = 0$, les valeurs correspondantes de η satisfont à l'équation

$$f(0, \eta) = 0.$$

Comme de plus la partie imaginaire de ξ est positive et que nous avons supposé que x_2 est positif, il s'en suit que la partie imaginaire de η doit être négative et la partie imaginaire de η' doit être positive. Ce raisonnement suppose, il est vrai, que les racines de $f(0, \eta) = 0$ soient

finies, mais on pourra toujours par un changement de coordonnées s'arranger de manière que les dites racines soient à la fois finies et inégales. Cela posé, on trouve facilement la limite cherchée

$$\lim_{a=\infty} J(a) = 2i\sum_1^3{}_\nu \frac{\Phi(0, \eta_\nu)}{\frac{\partial f}{\partial \eta_\nu}(\eta_\nu x_2 + x_3)} - 2i\sum_1^3{}_\nu \frac{\Phi(0, \eta'_\nu)}{\frac{\partial f}{\partial \eta'_\nu}(\eta'_\nu x_2 + x_3)}.$$

Mais en introduisant la valeur de Φ, on trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_\rho dx_1 = 2i\sum_1^3{}_\nu \frac{A_2 \cos(nx_2) + A_3 \cos(nx_3)}{f_1(0, \eta_\nu)(\eta_\nu x_2 + x_3)}$$

$$- 2i\sum_1^3{}_\nu \frac{A_2^{\nu'} \cos(nx_2) + A_3^{\nu'} \cos(nx_3)}{f_1(0, \eta'_\nu)(\eta'_\nu x_2 + x_3)}.$$

Dans la déduction de cette formule nous avons supposé x_2 plus grand que zéro mais on voit que l'égalité subsiste encore quand x_2 est négative, car σ_ρ ne change pas de signe si on change les signes de x_2 et x_3, et le second membre a la même propriété. Nous aurons maintenant à calculer

$$\int_s J(\infty) ds,$$

mais comme la valeur de cette intégrale ne dépend pas de la forme du contour s, on conclut que A_3^ν et $A_3^{\nu'}$ doivent satisfaire aux relations

$$A_2^\nu \eta_\nu + A_3^\nu = 0, \qquad A_2^{\nu'} \eta'_\nu + A_3^{\nu'} = 0.$$

En tirant A_3^ν et $A_3^{\nu'}$ de ces formules et en se rappelant que n désigne la normale intérieure de s, on parvient à la formule

$$L_\rho = -2i\int_s \sum_1^3{}_\nu \frac{A_2^\nu(\eta_\nu dx_3 + dx_2)}{f_1(0, \eta_\nu)(\eta_\nu x_2 + x_3)} + 2i\int_s \sum_1^3{}_\nu \frac{A_2^{\nu'}(\eta'_\nu dx_2 + dx_3)}{f_1(0, \eta'_\nu)(\eta'_\nu x_2 + x_3)},$$

mais ici il est facile d'éxécuter les intégrations; on trouve

$$\int \frac{\eta_\nu dx_2 + dx_3}{\eta_\nu x_2 + x_3} = 2\pi i, \qquad \int \frac{\eta'_\nu dx_2 + dx_3}{\eta'_\nu x_2 + x_3} = -2\pi i,$$

et par suite

$$L_\rho = 4\pi \sum_{a=1}^{6} \frac{A_2^a}{f_2(0, \eta_a)},$$

où l'on doit étendre la sommation à toutes les racines de l'équation $f(0, \eta) = 0$. Si on observe que la somme dans le second membre n'est autre chose que le coefficient de $\frac{1}{\eta}$ dans le développement de $\frac{A_2}{f(0, \eta)}$ suivant les puissances décroissantes de η, il est facile de simplifier l'expression de L_ρ. Nous avons en effet (voir form. (1) et (2) ce paragraphe)

$$A_2 = \nabla_{1\rho}^2 \psi_1 + \nabla_{2\rho}^2 \psi_2 + \nabla_{3\rho}^2 \psi_3$$

$$= \nabla_{1\rho}^2 \begin{vmatrix} k_1 & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ k_2 & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ k_3 & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{vmatrix} + \nabla_{2\rho}^2 \begin{vmatrix} \Delta_{11} & k_1 & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & k_2 & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & k_3 & \Delta_{33} \end{vmatrix} + \nabla_{3\rho}^2 \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & k_1 \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & k_2 \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & k_3 \end{vmatrix}$$

d'où l'on tire, en se rappelant les formules (6) et (7) § 1, la valeur suivante du coefficient de η^5 dans A_2

$$\binom{1\rho}{22} \begin{vmatrix} k_1, & \binom{21}{22}, & \binom{31}{22} \\ k_2, & \binom{22}{22}, & \binom{32}{22} \\ k_3, & \binom{23}{22}, & \binom{33}{22} \end{vmatrix} + \binom{2\rho}{22} \begin{vmatrix} \binom{11}{22}, & k_1, & \binom{31}{22} \\ \binom{12}{22}, & k_2, & \binom{32}{22} \\ \binom{13}{22}, & k_3, & \binom{33}{22} \end{vmatrix} + \binom{3\rho}{22} \begin{vmatrix} \binom{11}{22}, & \binom{21}{22}, & k_1 \\ \binom{12}{22}, & \binom{22}{22}, & k_2 \\ \binom{13}{22}, & \binom{23}{22}, & k_3 \end{vmatrix},$$

ou plus simplement

$$= k_\rho \begin{vmatrix} \binom{11}{22}, & \binom{21}{22}, & \binom{31}{22} \\ \binom{12}{22}, & \binom{22}{22}, & \binom{32}{22} \\ \binom{13}{22}, & \binom{23}{22}, & \binom{33}{22} \end{vmatrix},$$

mais ici le déterminant qui multiplie k_ρ est égal au coefficient de η^6 dans $f(0, \eta)$; par conséquent on aura

$$L_\rho = 4\pi k_\rho.$$

Parce que L_ρ ne dépend point des coefficients $\binom{\alpha\beta}{\lambda\mu}$ et comme on aurait obtenu la valeur de M_ρ par le même calcul, en prenant pour point de départ des formules où l'on eût changé $\binom{\alpha\beta}{\lambda\mu}$ en $\binom{\beta\alpha}{\mu\lambda}$, on conclut que la valeur de M_ρ est

$$M_\rho = 4\pi k_\rho.$$

Les formules (15) et (16) du paragraphe précédent prendront par suite la forme

$$(15a) \quad k_1 u_1^0 + k_2 u_2^0 + k_3 u_3^0 = \frac{1}{4\pi} \int\limits_\omega \sum\nolimits_\rho (T_\rho \beta_\rho - u_\rho \sigma_\rho) d\omega - \frac{1}{4\pi} \int\limits_S \sum\nolimits_\rho U_\rho \beta_\rho dS$$

et

$$(16a) \quad k_1 v_1^0 + k_2 v_2^0 + k_3 v_3^0 = \frac{1}{4\pi} \int\limits_\omega \sum\nolimits_\rho (\mathfrak{T}_\rho \alpha_\rho - v_\rho \tau_\rho) d\omega - \frac{1}{4\pi} \int\limits_S \sum\nolimits_\rho V_\rho \alpha_\rho dS.$$

Dans le cas où le point (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est un point de la surface ω avec un plan tangent déterminé on a les formules

$$(17a) \quad k_1 u_1^0 + k_2 u_2^0 + k_3 u_3^0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_\omega \sum\nolimits_\rho (T_\rho \beta_\rho - u_\rho \sigma_\rho) d\omega - \frac{1}{2\pi} \int\limits_S \sum\nolimits_\rho U_\rho \beta_\rho dS,$$

$$(18a) \quad k_1 v_1^0 + k_2 v_2^0 + k_3 v_3^0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_\omega \sum\nolimits_\rho (\mathfrak{T}_\rho \alpha_\rho - v_\rho \tau_\rho) d\omega - \frac{1}{2\pi} \int\limits_S \sum\nolimits_\rho V_\rho \alpha_\rho dS.$$

CHAPITRE III.

Applications.

§ 1. *Application à la théorie de l'équilibre d'un corps solide élastique.*

Soit f une forme quadratique définie des six variables

$$\delta_{\nu\nu} = \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\nu}, \qquad \delta_{\lambda\mu} = \delta_{\mu\lambda} = \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\mu} + \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\lambda},$$

nous avons déjà rappelé que $\int f dS$ peut représenter le potentiel des forces intérieures d'un corps élastique. Prenons un autre système de variables

$$\varepsilon_{\nu\nu} = \frac{\partial v_\nu}{\partial x_\nu}, \qquad \varepsilon_{\lambda\mu} = \varepsilon_{\mu\lambda} = \frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\mu} + \frac{\partial v_\mu}{\partial x_\lambda},$$

je rappelle que nous avons (§ 1, chapitre II)

$$\Delta = \frac{\partial f}{\partial \delta_{11}}\varepsilon_{11} + \frac{\partial f}{\partial \delta_{22}}\varepsilon_{22} + \frac{\partial f}{\partial \delta_{33}}\varepsilon_{33} + \frac{\partial f}{\partial \delta_{23}}\varepsilon_{23} + \frac{\partial f}{\partial \delta_{31}}\varepsilon_{31} + \frac{\partial f}{\partial \delta_{12}}\varepsilon_{12}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{11}}\delta_{11} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{22}}\delta_{22} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{33}}\delta_{33} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{23}}\delta_{23} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{31}}\delta_{31} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{12}}\delta_{12}.$$

Il s'en suit que les quantités $T_{\lambda\alpha}$ sont identiques aux composantes de pression qu'on désigne d'ordinaire par $t_{\lambda\alpha}$ (voir p. ex. Clebsch, *Theorie d. Elasticität*).

Soient X_1, X_2, X_3 les composantes rectangulaires de la force sollicitant un élément de volume, les composantes de déformation satisfont aux équations

$$\sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\partial t_{\lambda\alpha}}{\partial x_\alpha} = - X_\alpha. \qquad (\alpha=1,2,3)$$

Mais ces équations sont identiques aux équations différentielles (10) § 1, chapitre II. Cela suffit pour voir les rapports des problèmes traités auparavant avec le problème de l'équilibre d'un corps élastique solide.

Il reste à démontrer que le déterminant des fonctions $\Delta_{\lambda\mu}$ ne peut être nul pour aucun système de valeurs réelles des variables. Dans l'expression de Δ posons $u_\lambda = v_\lambda$, il vient

$$2f = \Delta(u, u).$$

Substituons dans cette équation $u_{\mu\beta} = x_\mu \xi_\beta$, on obtient

$$2f = \sum_{\lambda,\mu,\alpha,\beta} \binom{\lambda\mu}{\alpha\beta} x_\lambda x_\mu \xi_\alpha \xi_\beta = \sum_{\lambda,\mu} x_\lambda x_\mu \sum_{\alpha,\beta} \binom{\lambda\mu}{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta$$

$$= \sum_{\lambda,\mu} \Delta_{\lambda\mu}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) x_\lambda x_\mu.$$

C'est à dire, si l'on fait dans $2f$ les substitutions

$$\delta_{\nu\nu} = x_\nu \xi_\nu, \qquad \delta_{\lambda\mu} = x_\lambda \xi_\mu + x_\mu \xi_\lambda,$$

on obtient une forme quadratique en x_1, x_2, x_3, dont le déterminant est précisément le déterminant des fonctions $\Delta_{\lambda\mu}$.

Supposons que ce déterminant fût nul pour un système de valeurs réelles des variables, soit $\xi_\nu = \alpha_\nu$, où l'une des quantités α_ν doit être différente de zéro. Alors on pourrait trouver un système de valeurs réelles $x_\nu = a_\nu$, où l'une des quantités a_ν doit être différente de zéro, pour lequel f serait égale à zéro. Mais pour l'évanouissement de f il faut que $\partial_{\nu\nu} = 0$, $\partial_{\lambda\mu} = 0$, ou bien que les équations suivantes soient vérifiées

$$a_\nu \alpha_\nu = 0, \qquad a_\lambda \alpha_\mu + a_\mu \alpha_\lambda = 0.$$

Nous pouvons supposer que α_1 soit différent de zéro; il s'en suit que $a_1 = 0$. En substituant cette valeur dans les autres équations, on trouve $a_2\alpha_1 = 0$, $a_3\alpha_1 = 0$, d'où l'on conclut que $a_2 = a_3 = 0$, ce qui est contraire à la supposition. Ainsi le déterminant des fonctions $\Delta_{\lambda\mu}$ est différent de zéro pour tout système de valeurs réelles des variables ξ_ν, le système $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$ seulement excepté C. Q. F. D.

§ 2. *Développements en série.*

Nous avons vu que les fonctions α, et β jouissent de la propriété d'être développables en des séries de puissances dans le voisinage d'un point réelle a_1, a_2, a_3 quelconque, à l'exception seulement du point $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. De plus le développement de $\alpha(a_1 + h_1, a_2 + h_2, a_3 + h_3)$ suivant les puissances des variables h_1, h_2, h_3 converge pour toutes les valeurs de ces variables h satisfaisant à l'inégalité

$$\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2} \leqq \mu \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

où μ est une quantité positive indépendante des quantités a_ν et h_ν et inférieure à l'unité.

Cela rappelé, supposons que u_1, u_2, u_3 forment un système d'intégrales de équations différentielles (7) chapitre II vérifiant les conditions nécessaires pour l'application du théorème de Betti dans un domaine limité par deux surfaces sphériques 1 et 2 ayant l'origine pour centre et ρ_1 et ρ_2 pour rayons. Supposons l'inégalité $\frac{\rho_2}{\rho_1} < \mu^2$ remplie, il s'en suit

$$\frac{\rho_2}{\mu} < \rho_1 \mu.$$

Prenons un point x_1, x_2, x_3 situé entre les sphères des rayons $\frac{\rho_2}{\mu}$ et $\rho_1\mu$ et soit ξ_1, ξ_2, ξ_3 un point sur la sphère 2, le développement de

$$\alpha(\xi_1 - x_1, \xi_2 - x_2, \xi_3 - x_3)$$

suivant les puissances des variables ξ_ν converge, si

$$\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} < \mu\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

ou, en considérant la série comme fonction de x_1, x_2, x_3, si

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} > \frac{\rho_2}{\mu}.$$

Soit η_1, η_2, η_3 un point sur la sphère 1, le développement de

$$\alpha(\eta_1 - x_1, \eta_2 - x_2, \eta_3 - x_3)$$

suivant les puissances des variables x_1, x_2, x_3 converge, si

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} < \mu\rho_1.$$

Ainsi les deux développements des fonctions

$$\alpha(\eta_1 - x_1, \eta_2 - x_2, \eta_3 - x_3) \quad \text{et} \quad \alpha(\xi_1 - x_1, \xi_2 - x_2, \xi_3 - x_3)$$

ont pour domaine de convergence commun l'espace entre les deux surfaces sphériques des rayons $\frac{\rho_2}{\mu}$ et $\rho_1\mu$.

Ces développements convergent encore dans le même domaine si le point ξ_1, ξ_2, ξ_3 est à l'intérieur de la sphère 2 et le point η_1, η_2, η_3 est à l'extérieur de la sphère 1.

Appliquons maintenant la formule (4) chapitre II aux fonctions u_1, u_2, u_3. En prenant pour domaine S l'espace entre les deux sphères 1 et 2, nous obtenons en appelant ω_1 et ω_2 les surfaces des deux sphères 1 et 2:

$$k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega_1}\sum_{\rho=1}^{3} T_\rho(\eta_1, \eta_2, \eta_3)\sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\frac{x_1^{\lambda_1}.x_2^{\lambda_2}.x_3^{\lambda_3}}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\,\underline{|\lambda_3}}\frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\beta_\rho(-\eta_1, -\eta_2, -\eta_3)}{\partial\eta_1^{\lambda_1}\partial\eta_2^{\lambda_2}\partial\eta_3^{\lambda_3}}\,d\omega_1$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega_1}\sum_{\rho=1}^{3} u_\rho(\eta_1, \eta_2, \eta_3)\sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\frac{x_1^{\lambda_1}.x_2^{\lambda_2}.x_3^{\lambda_3}}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\,\underline{|\lambda_3}}\frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\sigma_\rho(-\eta_1, -\eta_2, -\eta_3)}{\partial\eta_1^{\lambda_1}\partial\eta_2^{\lambda_2}\partial\eta_3^{\lambda_3}}\,d\omega_1$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega_2}\sum_{\rho=1}^{3} T_\rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\frac{\xi_1^{\lambda_1}.\xi_2^{\lambda_2}.\xi_3^{\lambda_3}}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\,\underline{|\lambda_3}}\frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\beta_\rho(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^{\lambda_1}\partial x_2^{\lambda_2}\partial x_3^{\lambda_3}}\,d\omega_2$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega_2}\sum_{\rho=1}^{3} u_\rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\frac{\xi_1^{\lambda_1}.\xi_2^{\lambda_2}.\xi_3^{\lambda_3}}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\,\underline{|\lambda_3}}\frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\sigma_\rho(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^{\lambda_1}\partial x_2^{\lambda_2}\partial x_3^{\lambda_3}}\,d\omega_2.$$

Mais de la convergence uniforme des séries il suit qu'on en pourra effectuer l'intégration en intégrant chaque terme; on obtient ainsi un développement de l'expression $k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3$, valable dans l'espace entre les deux sphères des rayons $\frac{\rho_2}{\mu}$ et $\rho_1\mu$. Ce développement consiste en deux parties dont l'une est une série de puissances et l'autre est une série dont les termes sont les dérivées partielles des fonctions β_ν. La première de ces parties converge à l'intérieur de la sphère de rayon $\mu\rho_1$ et la seconde à l'extérieur de la sphère de rayon $\frac{\rho_2}{\mu}$.

Considérons maintenant le développements de quelques fonctions spéciales. Supposons d'abord que u_1, u_2, u_3 désignent les fonctions homogènes du degré entier négatif $-n$ et vérifiant les conditions nécessaires de continuité dans toute l'espace à l'exception de l'origine. Quand le rayon ρ_1 tend vers l'infini les deux premières intégrales tendent évidemment vers zéro. Des autres termes il ne reste que ceux qui sont homogènes du degré $-n$, de sorte qu'on obtient

$$k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3$$

$$= \sum_{\rho=1}^{3}\left(\sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} A^\rho_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\beta_\rho(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^{\lambda_1}\partial x_2^{\lambda_2}\partial x_3^{\lambda_3}} - \sum_{\mu_1\mu_2\mu_3} B^\rho_{\mu_1\mu_2\mu_3}\frac{\partial^{\mu_1+\mu_2+\mu_3}\sigma_\rho(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^{\mu_1}\partial x_2^{\mu_2}\partial x_3^{\mu_3}}\right)$$

où les valeurs $A^{\rho}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$ et $B^{\rho}_{\mu_1\mu_2\mu_3}$ sont des coefficients constants et les indices doivent satisfaire aux conditions

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = n - 1, \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = n - 2. \end{cases}$$

Supposons en particulier que n soit égal à l'unité il vient

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = A_1 \beta_1 + A_2 \beta_2 + A_3 \beta_3.$$

De plus nous savons que les fonctions β dépendent linéairement des constantes k de sorte qu'on peut écrire

$$\beta_\rho = k_1 \beta_{\rho 1} + k_2 \beta_{\rho 2} + k_3 \beta_{\rho 3},$$

d'où résultent pour les fonctions u les expressions

$$u_\nu = A_1 \beta_{1\nu} + A_2 \beta_{2\nu} + A_3 \beta_{3\nu}. \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

Posons dans ces formules $u_\nu = \alpha_\nu$ nous obtenons, en observant que dans ce cas $A_\rho = k_\rho$

$$\alpha_\nu = k_1 \beta_{1\nu} + k_2 \beta_{2\nu} + k_3 \beta_{3\nu}. \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

On déduit de cette formule, en égalant les coefficients des constantes k_ν et en posant

$$\alpha_\nu = k_1 \alpha_{\nu 1} + k_2 \alpha_{\nu 2} + k_3 \alpha_{\nu 3},$$

la rélation

$$\alpha_{\mu\nu} = \beta_{\nu\mu},$$

à l'aide de laquelle on pourra écrire l'expression des fonctions u de la manière suivante

$$u_\nu = A_1 \alpha_{\nu 1} + A_2 \alpha_{\nu 2} + A_3 \alpha_{\nu 3}. \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

Il résulte de cette formule que les fonctions α_ν sont les seules intégrales homogènes du degré -1 des équations (7) § 2 ayant la propriété d'être uniformes et continues ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres pour toutes les valeurs réelles des variables.

§ 3. *Des propriétés des intégrales dans les formules fondamentales.*

Dans la formule fondamentale (15) chapitre II nous avons désigné par T_ρ certaines fonctions linéaires des premières dérivées des fonctions u_1, u_2, u_3. Laissons maintenant de côté cette définition des quantités T_ρ et supposons seulement qu'elles soient des fonctions finies et en général continues des paramètres qui fixent la position d'un point sur la surface ω.

Soient x_1, x_2, x_3 les coordonnées d'un point réel A d'ailleurs quelconque, et ξ_1, ξ_2, ξ_3 les coordonnées d'un point A' sur la surface ω.

Considérons l'intégrale

$$(1) \qquad \varphi = k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + k_3\varphi_3 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega} \Sigma_\rho T_\rho \beta_\rho d\omega;$$

montrons que φ est une fonction continue pour tout système de valeurs réelles de x_1, x_2, x_3. Comme il résulte immédiatement de ce que nous avons dit dans le paragraphe précédent que φ est continue pour des points extérieurs à ω, prenons un point A sur ω.

Décrivons de A comme centre une sphère s de rayon ε; soit φ_0 la partie de l'intégrale φ étendue sur la partie ω_0 de ω intérieure à s et désignons par φ' le reste $\varphi - \varphi_0$. Alors φ' est une fonction continue en A. Mais nous savons qu'on peut déterminer une quantité finie et positive g de manière que

$$|\beta_\rho| < \frac{g}{r},$$

r étant la distance AA'. Soit de plus G une limite supérieure des fonctions T_ρ, on a

$$|\varphi_0| < \frac{3}{4\pi} G \cdot g \int\limits_{\omega_0} \frac{d\omega}{r}.$$

Mais on connaît des éléments de la théorie du potentiel que la valeur de l'intégrale dans cette inégalité converge vers zéro avec le rayon ε. Donc, on peut déterminer ε assez petit pour que la différence de deux valeurs de φ_0 en des points intérieurs à s soit moindre qu'une quantité arbitrairement petite, d'où résulte bien que $\varphi = \varphi_0 + \varphi'$ est une fonction continue en A.

Passons maintenant à l'intégrale

$$\vartheta = k_1\vartheta_1 + k_2\vartheta_2 + k_3\vartheta_3 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \Sigma_\rho U_\rho \beta_\rho dS$$

où U_ρ est une fonction continue des variables ξ_1, ξ_2, ξ_3.

Il est clair que ϑ est une fonction continue ainsi que ses dérivées pour des points $A(x_1, x_2, x_3)$ extérieurs au volume S.

Pour établir la continuité de ϑ pour des points appartenant à S on n'a qu'à répéter la démonstration bien connue pour la continuité du potentiel d'une masse étendue à trois dimensions.

Par la même méthode on établit aussi la continuité des premières dérivées de ϑ.

Revenons maintenant à la formule (15 a) chapitre II. Nous avons vu que l'expression

$$(2) \qquad \frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \Sigma_\rho (T_\rho\beta_\rho - U_\rho\sigma_\rho) d\omega - \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \Sigma_\rho U_\rho \beta_\rho dS$$

pour des points A appartenant au volume S représente la fonction $k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3$ et si le point A se trouve sur ω, l'expression (2) est égale à $\frac{1}{2}(k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3)$ et enfin, si A est en déhors de S elle est égale à zéro. Mais de ce que nous avons démontré de la continuité des intégrales φ et ϑ, il suit que les changements brusques de l'expression (2) sont dus à l'intégrale

$$\varpi = k_1\varpi_1 + k_2\varpi_2 + k_3\varpi_3 = \frac{1}{4\pi}\int \Sigma_\rho u_\rho \sigma_\rho d\omega.$$

Soit s un point de la surface ω. Désignons par ϖ_s la valeur de ϖ au point s, par ϖ_{is} la limite de ϖ quand le point $A(x_1, x_2, x_3)$ tend vers s en étant à l'intérieur de la surface, par ϖ_{es} la limite de ϖ quand le point A tend vers s en étant à l'extérieur de la surface, on a les deux relations

$$(3) \qquad \begin{aligned} \varpi_{is} &= \varpi_s - \frac{1}{2}(k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3), \\ \varpi_{es} &= \varpi_s + \frac{1}{2}(k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3). \end{aligned}$$

Donc, si u_1, u_2, u_3 sont les valeurs sur la surface ω de trois fonctions

des variables ξ_1, ξ_2, ξ_3 et si les fonctions aient des dérivées continues des deux premiers ordres, les formules (3) nous informent de la discontinuité de l'intégrale ϖ.

Mais nous allons démontrer que les formules subsistent encore dans des conditions un peu plus générales.

Soient u_1, u_2, u_3 des fonctions des paramètres qui fixent la position d'un point sur ω. Supposons que ces fonctions admettent des dérivées finies du premier ordre, et prenons sur ω un point s où la courbure est finie. Décrivons de s comme centre une sphère de rayon ε, qui découpe sur la surface ω une courbe γ. Soit ϖ' la partie de l'intégrale relative à l'aire ω_0 intérieure à γ, on aura

$$\varpi' = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega_0} \sum_\rho u_\rho \sigma_\rho d\omega = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega_0} \sum_\rho u'_\rho \sigma_\rho d\omega + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega_0} \sum_\rho (u_\rho - u'_\rho) d\omega.$$

Mais comme σ_ρ est une fonction homogène du degré -2 qui est régulière en dehors du point s on peut poser, en désignant par r la distance de s à un autre point de ω:

$$\sigma_\rho = \frac{\sigma_\rho^0}{r^2},$$

où σ_ρ^0 est une fonction dont le module a une limite supérieure finie, soit g. Alors on a

$$\int\limits_{\omega_0} \sum_\rho (u_\rho - u'_\rho)\sigma_\rho d\omega = \int\limits_{\omega_0} \sum_\rho \frac{u_\rho - u'_\rho}{r} \sigma_\rho^0 . \frac{d\omega}{r}.$$

Mais il existe une limite supérieure finie de $\frac{1}{r}(u_\rho - u'_\rho)$, quelque petit que soit r; soit u cette limite on pourra écrire

$$\left| \int\limits_{\omega_0} \sum_\rho (u_\rho - u'_\rho)\sigma_\rho d\omega \right| < 3gu \int\limits_{\omega_0} \frac{d\omega}{r}.$$

Mais dans la théorie du potentiel on démontre que l'intégrale a une valeur absolue moindre que

$$\frac{2\pi\varepsilon}{\cos\gamma_0}$$

où γ_0 désigne le plus grand angle d'une normale à ω_0 avec la normale en s.

L'intégrale $\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega_1}\Sigma_\rho u_\rho^s \sigma_\rho d\omega$ n'est jamais plus grande que $k_1 u_1^s + k_2 u_2^s + k_3 u_3^s$. Nous pouvons donc écrire l'inégalité suivante

$$|\varpi'| < |k_1 u_1^s + k_2 u_2^s + k_3 u_3^s| + \frac{3gu\varepsilon}{2\cos\gamma_0},$$

d'où il résulte qu'on peut choisir le rayon ε assez petit pour que l'intégrale $\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega}\Sigma_\rho (u_\rho - u_\rho^s)\sigma_\rho d\omega$ soit en valeur absolue moindre qu'une quantité arbitrairement petite ∂.

Comme l'intégrale $\varpi - \varpi'$ est continue dans le voisinage de s, on conclut que l'intégrale

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega}\Sigma_\rho (u_\rho - u_\rho^s)\sigma_\rho d\omega$$

est continue au point s. De là on déduit immédiatement les équations (3).

Comme les seconds membres dans les équations (3) sont indépendants des coefficients dans les équations différentielles définissant les fonctions β, on voit (voir p. 27) que les formules (3) subsistent aussi pour les fonctions définies par l'intégrale

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega}(v_1\tau_1 + v_2\tau_2 + v_3\tau_3)d\omega.$$

Nous avons établi que les fonctions φ sont des fonctions continues; au contraire ses dérivées premières présentent des discontinuités dont nous allons montrer la nature sous l'hypothèse que les T_ν soient des fonctions ayant des dérivées du premier ordre.

Comme τ_ρ désigne une fonction linéaire des constantes arbitraires k, mettons-les en évidence, en écrivant

$$\tau_\rho = k_1\tau_\rho^1 + k_2\tau_\rho^2 + k_3\tau_\rho^3,$$

où les τ_ρ^ν sont des fonctions linéaires des cosinus directeurs de la normale de ω:

$$\tau_\rho^\nu = \Sigma_a \tau_{\rho a}^\nu \cos(nx_a),$$

d'où on déduit l'expression suivante de $\tau^{\nu}_{\rho\alpha}$ (voir form. (8) chapitre II § 1 et chapitre III § 2)

$$\tau^{\nu}_{\rho\alpha} = \sum_{\mu} \Delta^{\alpha}_{\rho\mu} \alpha_{\mu\nu}.$$

A l'aide de ces notations nous pouvons substituer aux formules (3) l'énoncé suivante: l'intégrale $\int\limits_{\omega} v\tau^{\lambda}_{\alpha} d\omega$ est une fonction continue de (x_1, x_2, x_3) si λ est inégal à α; au contraire, si $\lambda = \alpha$, l'intégrale présente une discontinuité définie par les formules

$$\left[\int\limits_{\omega} v\tau^{\alpha}_{\alpha} d\omega\right]^{is}_{s} = -2\pi v_s, \qquad \left[\int\limits_{\omega} v\tau^{\alpha}_{\alpha} d\omega\right]^{es}_{s} = 2\pi v_s.$$

En différentiant maintenant l'expression de φ_μ à l'aide des fonctions α

$$\varphi_\mu = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\omega} (T_1 \alpha_{\mu 1} + T_2 \alpha_{\mu 2} + T_3 \alpha_{\mu 3}) d\omega,$$

on obtient

$$\sum_{\mu} \Delta^{\alpha}_{\lambda\mu} \varphi_\mu = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\omega} \sum_{\mu} (T_1 \Delta^{\alpha}_{\lambda\mu} \alpha_{\mu 1} + T_2 \Delta^{\alpha}_{\lambda\mu} \alpha_{\mu 2} + T_3 \Delta^{\alpha}_{\lambda\mu} \alpha_{\mu 3}) d\omega$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\omega} (T_1 \tau^{1}_{\lambda\alpha} + T_2 \tau^{2}_{\lambda\alpha} + T_3 \tau^{3}_{\lambda\alpha}) d\omega.$$

Multiplions les deux membres avec $\cos(nx_\alpha)$ et faisons la somme par rapport à l'indice α, nous aurons

$$\sum_{\alpha} \cos(nx_\alpha) \sum_{\mu} \Delta^{\alpha}_{\lambda\mu} \varphi_\mu = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\omega} (T_1 \tau^{1}_{\lambda} + T_2 \tau^{2}_{\lambda} + T_3 \tau^{3}_{\lambda}) d\omega. \tag{4}$$

Or l'intégrale dans le second membre est de la même forme que l'intégrale définissant la fonction ϖ, donc nous pouvons rendre compte de la discontinuité de l'expression (4) par les formules suivantes

$$\left[\sum_{\alpha\mu} \cos(nx_\alpha) \Delta^{\alpha}_{\lambda\mu} \varphi_\mu\right]^{is}_{s} = \frac{1}{2} T_\lambda$$

$$\left[\sum_{\alpha\mu} \cos(nx_\alpha) \Delta^{\alpha}_{\lambda\mu} \varphi_\mu\right]^{es}_{s} = -\frac{1}{2} T_\lambda.$$

Reprenons maintenant l'étude de l'intégrale ϑ, en supposant que les fonctions U_ρ admettent des dérivées continues du premier ordre. En vertu de cette hypothèse on pourra écrire, en appliquant une formule bien connue de la théorie du potentiel:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x_a} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \sum\nolimits_\rho U_\rho \beta_\rho \cos(nx_a)\, d\omega - \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \sum\nolimits_\rho \frac{\partial U_\rho}{\partial x_a} \beta_\rho\, dS.$$

En égalant les coefficients de k_μ dans les deux membres de cette équation et en remplaçant les fonctions $\beta_{\rho\mu}$ par les expressions équivalentes $\alpha_{\mu\rho}$, on trouve

$$\frac{\partial \vartheta_\mu}{\partial x_a} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \sum\nolimits_\rho U_\rho \alpha_{\mu\rho} \cos(nx_a)\, d\omega - \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \sum\nolimits_\rho \frac{\partial U_\rho}{\partial x_a} \alpha_{\mu\rho}\, dS.$$

Prenons la dérivée des deux membres par rapport à x_β il vient

$$\frac{\partial^2 \vartheta_\mu}{\partial x_a \partial x_\beta} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \sum\nolimits_\rho U_\rho \frac{\partial \alpha_{\mu\rho}}{\partial x_\beta} \cos(nx_a)\, d\omega - \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \sum\nolimits_\rho \frac{\partial U_\rho}{\partial x_a} \frac{\partial \alpha_{\mu\rho}}{\partial x_\beta}\, dS,$$

où le dernier terme est une fonction continue.

En multipliant les deux membres de l'équation par le coefficient $\binom{\lambda\mu}{\alpha\beta}$ et en faisant la somme par rapport aux indices α et β, on trouve

$$\Delta_{\lambda\mu}\vartheta_\mu = \frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \sum\nolimits_a \sum\nolimits_\rho U_\rho \sum\nolimits_\beta \binom{\lambda\mu}{\alpha\beta} \frac{\partial \alpha_{\mu\rho}}{\partial x_\beta} \cos(nx_a)\, d\omega + \text{ une fonction continue.}$$

Rappelant la formule

$$\sum\nolimits_\beta \binom{\lambda\mu}{\alpha\beta} \frac{\partial \alpha_{\mu\rho}}{\partial x_\beta} = - \Delta^a_{\lambda\mu} \alpha_{\mu\rho},$$

on pourra écrire l'expression de $\Delta_{\lambda\mu}\vartheta_\mu$

$$\Delta_{\lambda\mu}\vartheta_\mu = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \sum\nolimits_a \sum\nolimits_\rho U_\rho \Delta^a_{\lambda\mu} \alpha_{\mu\rho} \cos(nx_a)\, d\omega + \text{ une fonction continue.}$$

Prenons la somme par rapport a μ, nous aurons

$$\sum\nolimits_\mu \Delta_{\lambda\mu}\vartheta_\mu = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \sum\nolimits_a \sum\nolimits_\rho U_\rho \sum\nolimits_\mu \Delta^a_{\lambda\mu} \alpha_{\mu\rho} \cos(nx_a)\, d\omega + \text{ une fonction continue.}$$

Mais on a la formule

$$\sum_a \sum_\mu \Delta^a_{\lambda\mu} \alpha_{\mu\rho} \cos(nx_a) = \tau^\rho_\lambda,$$

à l'aide de laquelle on obtient

$$\sum_\mu \Delta_{\lambda\mu} \vartheta_\mu = -\frac{1}{4\pi} \int_\omega \sum_\rho U_\rho \tau^\rho_\lambda d\omega + \text{ une fonction continue.}$$

Nous avons démontré que l'intégrale qui figure dans cette formule éprouve une diminution brusque égale à U_λ quand le point $A(x_1, x_2, x_3)$ passe de l'intérieur à l'extérieur de la surface ω. Mais nous savons que $\sum_\mu \Delta_{\lambda\mu} \vartheta_\mu$ est égale à zéro pour les points extérieurs à S; par suite on a pour les points intérieurs

$$\sum_\mu \Delta_{\lambda\mu} \vartheta_\mu = U_\lambda. \qquad (\lambda = 1, 2, 3)$$

Il résulte de ce que nous avons démontré sur les fonctions ϑ qu'elles nous donnent la solution du problème suivant:

Déterminer l'état de déformation d'un milieu élastique illimité quand ce milieu n'est soumis qu'à des forces agissant aux éléments de volume intérieurs à une certain surface et qu'on suppose que la déformation à distance infinie est nulle.

Prenant en particulier le volume S infiniment petit on trouve que

$$\vartheta = -\frac{1}{4\pi} \sum_\rho \beta_\rho \int_S U_\rho dS,$$

d'où, en posant $\int_S U_\rho dS = -X_\rho$, on déduit

$$\vartheta_\nu = \frac{1}{4\pi}(X_1 \beta_{1\nu} + X_2 \beta_{2\nu} + X_3 \beta_{3\nu}).$$

Ainsi il est clair que ces fonctions ϑ représentent les composantes de déformation dans le cas limite, où le milieu est sollicité en un seul point par une force dont les composantes sont X_1, X_2, X_3.

§ 4. *Usage de fonctions compensatrices.*

En s'inspirant des idées de Green on peut réduire les problèmes généraux de l'équilibre d'un corps élastique à des problèmes particuliers de la même nature.

Envisageons d'abord le cas, où l'on se donne les composantes de déformation sur la surface ω d'un corps S, et les forces agissant sur les éléments de volume du corps.

Si on peut résoudre le problème d'équilibre dans le cas particulier, où les composantes de déformation à la surface ω sont égales aux fonctions $\alpha_\nu(\xi_1 - x_1, \xi_2 - x_2, \xi_3 - x_3)$ et les forces intérieures sont égales à zéro, on peut aussi résoudre le problème général. Désignons les composantes de déformation dans le problème particulier par $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ et les composantes de la pression à la surface par $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$. Alors le théorème de Betti nous donne

$$0 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \Sigma_\rho(\gamma_\rho T_\rho - \Gamma_\rho u_\rho)d\omega - \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \Sigma_\rho U_\rho \gamma_\rho dS.$$

En formant la différence de cette expression et le second membre de l'équation (15a) § 3 chap. II, on trouve la solution du problème général:

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \Sigma_\rho(\Gamma_\rho - \sigma_\rho)u_\rho d\omega - \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \Sigma_\rho U_\rho(\alpha_\rho - \gamma_\rho)dS.$$

Considérons le second problème, où les forces agissant sur la surface sont connues. Désignons par T_ρ les composants de ces forces. Soient U_1, U_2, U_3 les composantes de la force agissant sur un élément de volume de S. Alors on sait que le corps S doit être en équilibre sous l'influence de ces forces, ce qui entraîne les six conditions

$$\int\limits_\omega T_\rho d\omega + \int\limits_S U_\rho dS = 0,$$

$$\int\limits_\omega (\xi_\lambda T_\rho - \xi_\rho T_\lambda)d\omega + \int\limits_S (\xi_\lambda U_\rho - \xi_\rho U_\lambda)dS = 0.$$

La solution de ce problème d'équilibre n'est pas unique; soient u_1, u_2, u_3 des fonctions donnant une solution, on obtient toutes les autres par les formules

$$u_\lambda + a_\lambda + p_\mu x_\nu - p_\nu x_\mu$$

où a_λ et p_μ désignent des constantes.

A la déformation définie par les fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ correspondent des composantes de pression égales aux τ_1, τ_2, τ_3. Nous avons déjà trouvé que $\int_\omega \tau_\rho d\omega = 4\pi k_\rho$. En substituant dans la formule (15a) chapitre II des fonctions linéaires pour les u, on trouve

$$\int_\omega (\xi_\lambda \tau_\rho - \xi_\rho \tau_\lambda) d\omega = 4\pi(x_\lambda k_\rho - x_\rho k_\lambda).$$

Prenons maintenant pour origine le centre de gravité de la surface ω, et pour axes les axes principales d'inertie de la surface ω.

Appliquons à la surface ω des forces dont les composantes sont

$$t_\lambda = b_\lambda + c_\mu \xi_\nu - c_\nu \xi_\mu. \qquad (\lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3)$$

Ecrivons les conditions pour que les forces $-t$ et τ se fassent équilibre, nous aurons

$$\int_\omega t_\lambda d\omega = b_\lambda . \int_\omega d\omega = 4\pi k_\lambda,$$

$$\int_\omega (\xi_\lambda t_\rho - \xi_\rho t_\lambda) d\omega = c_\mu . \int_\omega (\xi_\lambda^2 + \xi_\rho^2) d\omega = 4\pi(x_\lambda k_\rho - x_\rho k_\lambda).$$

On voit que les valeurs des coefficients b et c satisfaisant à ces équations sont des fonctions linéaires des variables x_ν. Pourvu que les coefficients b et c aient été choisis de manière à satisfaire aux conditions d'équilibre et en faisant l'hypothèse que le problème de l'équilibre soit possible, on peut résoudre ce problème dans le cas particulier où les forces agissant sur ω sont égales à

$$\tau_\rho - t_\rho.$$

Désignons, dans ce cas particulier, par $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ les composantes de déformation et par $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ les composantes de pression correspondantes. On a par suite pour les points de la surface ω les relations

$$\tau_\rho - \Lambda_\rho = t_\rho.$$

D'ailleurs le théorème de Betti nous donne

$$o = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega}\Sigma(\delta_\rho T_\rho - \Lambda_\rho u_\rho)d\omega - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S}\Sigma_\rho U_\rho \delta_\rho dS,$$

et la formule (15) chapitre II

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega}\Sigma_\rho(T_\rho \alpha_\rho - u_\rho \tau_\rho)d\omega - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S}\Sigma U_\rho \alpha_\rho dS,$$

d'où l'on obtient, en formant la différence,

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega}\Sigma_\rho T_\rho(\delta_\rho - \alpha_\rho)d\omega - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega}\Sigma_\rho U_\rho(\tau_\rho - \Lambda_\rho)d\omega$$
$$- \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S}\Sigma_\rho U_\rho(\alpha_\rho - \delta_\rho)dS.$$

Mais ici la seconde intégrale est égale à une fonction linéaire des variables x_ν de la forme

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 + \begin{vmatrix} k_1, & k_2, & k_3 \\ p_1, & p_2, & p_3 \\ x_1, & x_2, & x_3 \end{vmatrix},$$

et qui par suite représente un simple déplacement du corps. En supposant cette fonction égale à zéro, nous obtenons la solution

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega}\Sigma_\rho T_\rho(\delta_\rho - \alpha_\rho)d\omega - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S}\Sigma_\rho U_\rho(\alpha_\rho - \delta_\rho)dS.$$

SUR LA REPRÉSENTATION ANALYTIQUE D'UNE BRANCHE UNIFORME D'UNE FONCTION MONOGÈNE

(Première note[1])

PAR

G. MITTAG-LEFFLER.

Désignons par a un point du plan de la variable complexe x, et adjoignons à a une suite infinie de quantités,

$$(1) \qquad F(a)\,,\, F^{(1)}(a)\,,\, F^{(2)}(a)\,,\, \ldots\,,\, F^{(\mu)}(a)\,,\, \ldots$$

où chaque quantité est parfaitement déterminée quand on sait le rang qu'elle occupe dans la suite. Supposons, ce qui sera possible d'une infinité de manières, que ces quantités F soient choisies telles que la limite supérieure des valeurs limites[2] des modules $\left|\sqrt[\mu]{\frac{1}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)}\right|$ soit un nombre fini, par exemple $\frac{1}{r}$.

---

[1] La présente note est un extrait des différentes communications qui ont été faites à l'Académie des sciences de Stockholm dans le courant de l'année 1898, et qui ont été publiées sous les titres suivants:

Om en generalisering af potensserien (9 Mars 1898).

Om den analytiska framställningen af en allmän monogen funktion: Första meddelande (11 Maj 1898); Andra meddelande (11 Maj 1898); Tredje meddelande (14 Sept. 1898).

[2] P désignant une suite infinie de nombres, on nommera nombre limite ou valeur limite de ces nombres, un nombre tel que, dans un voisinage aussi rapproché de lui que l'on voudra, il se trouve une infinité de nombres appartenant à P. L'*infini* est dit *la valeur limite* de la suite si, dans un voisinage aussi rapproché de zéro que l'on voudra,

Si, au moyen des quantités F comme éléments, l'on forme une série de puissances

$$(2) \qquad \mathfrak{P}(x\,|\,a) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)\,.\,(x-a)^{\mu},$$

cette série sera convergente tant que x remplira la condition

$$|x - a| < r,$$

et sera divergente tant que

$$|x - a| > r.$$ [1]

Le domaine $|x - a| < r$, qui dans le plan des x est représenté par un cercle ayant pour centre le point a et pour rayon la quantité positive r, est le cercle de convergence de la série $\mathfrak{P}(x\,|\,a)$.[2]

Dans la théorie des fonctions analytiques, édifiée par WEIERSTRASS, la fonction est définie par la série $\mathfrak{P}(x\,|\,a)$ et par la continuation analytique de cette série. Chaque fonction analytique est parfaitement déterminée, pourvu que les éléments

$$F(a)\,,\, F^{(1)}(a)\,,\, F^{(2)}(a)\,,\, \ldots\,,\, F^{(\mu)}(a)\,,\, \ldots$$

soient donnés. On désigne en général par $F(x)$ la fonction qui dans sa totalité est définie par ces éléments.

Si K est un continuum formé d'une seule pièce qui ne se recouvre

---

il existe une infinité de nombres qui sont les inverses des nombres appartenant à la suite P. Si P est formée de nombres réels quelconques, et, si parmi ces nombres il en existe un qui n'est inférieur à aucun des autres, ce nombre sera dit *la limite supérieure* de P. Si, parmi les nombres qui appartiennent à P, il en est de plus grands que tout nombre donné, c'est *l'infini* qui sera dit *la limite supérieure* de P. Si aucun de ces deux cas n'a lieu il existe toujours, ainsi que WEIERSTRASS l'a démontré d'une manière rigoureuse, un nombre plus grand que tous les nombres appartenant à P et tel que dans chaque voisinage de ce nombre il existe un nombre infini de valeurs appartenant à P. Ce nombre alors sera dit *la limite supérieure* de P.

La limite inférieure de P peut aussi être définie d'une manière analogue.

[1] Voir: CAUCHY, Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique. I[ère] Partie. Analyse algébrique, Paris 1821. Chapitre 9, § 2, théorème I, pag. 286.

[2] Nous ne comptons donc pas le contour du cercle de convergence comme faisant partie du cercle.

nulle part elle-même, renfermant le point a, et tel que la branche de la fonction $F(x)$, formée par $\mathfrak{P}(x \mid a)$ et sa continuation analytique à l'intérieur de K, reste uniforme et régulière, nous désignerons cette branche par $FK(x)$.

Le problème dont nous allons nous occuper sera de trouver une représentation analytique d'une branche $FK(x)$ choisie aussi étendue que possible.

De la définition même de la fonction analytique $F(x)$, et de celle de la branche $FK(x)$, résulte immédiatement une sorte de représentation analytique de la branche $FK(x)$ en question.

En effet, pour obtenir une représentation de cette branche, il suffit d'effectuer un nombre dénombrable de prolongements analytiques de $\mathfrak{P}(x|a)$, par exemple

$$\mathfrak{P}_\nu(x \mid a_\nu) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\mu}} \left(\frac{d^\mu FK(x)}{dx^\mu}\right)_{x=a_\nu} (x - a_\nu)^\mu,$$

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots; \; a_0 = a; \; \mathfrak{P}_0(x \mid a) = \mathfrak{P}(x \mid a).$$

Les séries $\mathfrak{P}_\nu(x \mid a_\nu)$ sont formées au moyen des éléments

$$\left(\frac{d^\mu FK(x)}{dx^\mu}\right)_{x=a_\nu}; \qquad \binom{\mu=0,1,2,\ldots}{\nu=0,1,2,\ldots}$$

et ces éléments eux-mêmes peuvent être calculés au moyen des éléments primitifs

$$F^{(\mu)}(a); \; (\mu = 0, 1, 2, \ldots; \; F^{(0)}(a) = F(a)).$$

Mais, pour opérer ce calcul, il faut connaître le rayon du cercle de convergence de chaque série $\mathfrak{P}_\nu(x \mid a_\nu)$, car il est impossible d'effectuer la continuation immédiate d'une telle série sans en connaître le rayon de convergence. Nous avons déjà cité le théorème de Cauchy qui nous donne ce rayon de convergence exprimé par l'inverse de la limite supérieure des quantités positives

$$\left|\sqrt[\mu]{\frac{1}{\underline{|\mu}}\left(\frac{d^\mu FK(x)}{dx^\mu}\right)_{x=a_\nu}}\right|; \; \mu = 0, 1, 2, \ldots.$$

On voit que cette manière de représenter $FK(x)$ au moyen d'expressions analytiques est d'une complication extrême et d'une transcen-

dance très élevée. Il semble d'ailleurs que WEIERSTRASS n'ait guère regardé la continuation analytique autrement que comme un mode de définition de la fonction analytique. Les avantages de cette définition sont bien connus, et je n'ai pas besoin d'y insister.

Au premier abord il semble que la théorie de CAUCHY, qui est édifiée sur des principes tout autres que celle de WEIERSTRASS, possède un grand avantage sur celle-ci, lorsqu'il s'agit de la représentation analytique de $FK(x)$. En effet une telle représentation est donnée par la formule

$$FK(x) = \int^{S} \frac{FK(z)}{z-x} dz, \tag{3}$$

où l'intégrale est prise le long d'un contour fermé S situé à l'intérieur de K et aussi rapproché de la frontière de K que l'on voudra. D'après la définition même d'une intégrale, il est évident que l'intégrale (3) peut être remplacée par une somme infinie de fonctions rationnelles de x dont les coefficients sont exprimés par des valeurs spéciales de x en nombre dénombrable et par les valeurs correspondantes de $FK(x)$. Cette observation a été le point de départ d'un travail magistral de M. RUNGE, que j'ai publié dans le tome 6 de ce journal.[1] La représentation analytique que l'on obtient ainsi exige donc que l'on connaisse la valeur de $FK(x)$ en un nombre infini et dénombrable de points qui doivent se rapprocher indéfiniment de la frontière de K. Or, dans les problèmes habituels de l'analyse, ces valeurs ne sont nullement connues. En général, c'est au contraire la série des valeurs

$$F(a), F^{(1)}(a), F^{(2)}(a), \ldots$$

qui est donnée. Si l'on se met au point de vue usuel, il en est ainsi, par exemple, dans le problème si vaste de l'intégration des équations différentielles.

Quand il s'agira de trouver la représentation analytique de $FK(x)$, il faudra donc la tirer des éléments (1) et s'efforcer à l'aide seule de ces éléments de construire une formule qui représente la branche $FK(x)$ toute entière.

---

[1] *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen*, § 1, p. 229—239.

Désignons par C le cercle de convergence de la série (2). L'expression

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a).(x-a)^{\mu}$$

donnera alors la représentation analytique de $FC(x)$, l'égalité

$$FC(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a).(x-a)^{\mu}$$

ayant lieu pour tous les points de C.

Cette expression est construite au moyen des éléments

$$F(a), F^{(1)}(a), F^{(2)}(a), \ldots$$

et des nombres rationnels $\frac{1}{\underline{|\mu}}$ indépendants du choix des dits éléments.

Est-il possible d'obtenir de même pour une branche $FK(x)$ ayant la plus grande étendue possible une représentation analytique de cette nature? Nous allons voir que la réponse est affirmative, et qu'il est par conséquent possible de combler une lacune de la théorie des fonctions analytiques; en effet, jusqu'ici l'on n'avait pu donner pour la branche générale $FK(x)$ une représentation analytique pareille à celle trouvée dès les débuts de la théorie pour la branche $FC(x)$.

Pour traiter à fond la question que nous avons posée, il faut définir un domaine K qui soit aussi vaste que possible. C'est ce que nous allons faire en introduisant une nouvelle conception géométrique: l'*Etoile*.

Dans le plan de la variable complexe x, soit une aire engendrée de la manière suivante: autour d'un point fixe a on fera tourner une fois un vecteur[1] l; sur chaque vecteur on déterminera d'une manière univoque un point, soit a_l, dont la distance au point fixe a sera plus grande qu'une quantité positive donnée, la même pour tous les vecteurs. Ce point a_l pourra être situé à une distance finie ou infinie du point a. Dans le cas où la distance de a à a_l est finie, on exclura du plan des x la partie du vecteur qui s'étend de a_l à l'infini. Nous donnerons le nom d'*Etoile* au domaine qui reste après que l'on aura exécuté toutes ces coupures dans le plan des x.

---

[1] Une demi-droite.

On voit que *l'étoile*[1] ainsi définie est un continuum formé d'une seule pièce et à connexion simple.

Adjoignons maintenant à a les éléments

$$F(a)\,,\, F^{(1)}(a)\,,\, F^{(2)}(a)\,,\, \ldots\,,\, F^{(\mu)}(a)\,,\, \ldots\,,$$

et formons la série

$$\mathfrak{P}(x\,|\,a) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)\,.\,(x-a)^{\mu}.$$

Effectuons la continuation analytique de $\mathfrak{P}(x\,|\,a)$ le long d'un vecteur issu du point a.

Il se peut que chaque point de ce vecteur appartienne au cercle de convergence d'une série qui est elle-même une continuation analytique de $\mathfrak{P}(x\,|\,a)$ obtenue en procédant le long du vecteur; mais il est aussi possible qu'en procédant le long du vecteur on rencontre un premier point qui n'est situé à l'intérieur du cercle de convergence d'aucune continuation analytique de $\mathfrak{P}(x\,|\,a)$ le long du vecteur. Dans ce dernier cas nous exclurons du plan des x la partie du vecteur comprise entre le point ci-dessus et l'infini. En faisant tourner une fois le vecteur autour de a nous obtiendrons une étoile telle qu'elle a été définie précédemment.

Cette étoile étant donnée d'une manière univoque dès que les éléments (1) sont fixés, nous l'appellerons *l'étoile appartenant à ces éléments.*[1] Nous la désignerons en général par A, la première lettre du mot grec ἀστήρ.

En définissant l'étoile, nous avons choisis comme vecteurs des demi-droites. Il est facile de voir qu'on aurait pu prendre aussi bien des lignes courbes définies d'une manière convenable.

En analogie parfaite avec la terminologie: *étoile appartenant aux éléments* (1), nous parlerons du *cercle appartenant à ces éléments,* qui n'est pas autre chose que le cercle de convergence de la série

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a).(x-a)^{\mu}. \tag{2}$$

Nous parlerons de même de *la fonction* $F(x)$ et de *la branche fonctionnelle* $FA(x)$ *appartenant à ces éléments.*

---

[1] J'ai introduit pour la première fois la conception de l'étoile appartenant aux éléments (1) dans ma note déjà citée *Om en generalisering* etc.

Ces préliminaires terminés nous pouvons énoncer ainsi le théorème principal qui sera démontré dans la suite:

La branche $FA(x)$ peut toujours être représentée par une série

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} G_{(\mu)}(x),$$

les $G_{(\mu)}(x)$ désignant des fonctions entières rationnelles de x:

$$G_{(\mu)}(x) = \sum_{(\nu)} c_\nu^{(\mu)} F^{(\nu)}(a) \,.\, (x - a)^\nu,$$

où les coefficients $c_\nu^{(\mu)}$ sont donnés a priori indépendamment du choix de a et de $F^{(\nu)}(a)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$.

Cette série $\sum_{\mu=0}^{\infty} G_\mu(x)$ est convergente pour chaque point de l'étoile A et uniformément convergente pour chaque domaine à l'intérieur de A.

Dans cette première note on trouvera une démonstration de ce théorème, remarquable par la forme très-simple qu'on obtient pour les coefficients $c_\nu^{(\mu)}$. Dans d'autres notes nous donnerons d'autres démonstrations qui se distinguent surtout par une détermination différente des $c_\nu^{(\mu)}$. Nous nous occuperons de même d'autres questions rentrant dans le même ordre d'idées ainsi que de leurs applications.

Pour donner la démonstration que nous voulons exposer dans cette note il sera commode d'employer une construction géométrique se rapportant à une étoile quelconque, soit E, qui n'est pas le plan des x tout entier.

Soit a le centre de l'étoile E, et soit n un nombre entier positif donné. Nous définirons une étoile $E^{(n)}$ de la manière suivante. Fixons un vecteur l issu du point a. En désignant par r une quantité positive suffisamment petite et en limitant le vecteur à la longueur $(n-1)r$, il arrivera que tout cercle de rayon r, décrit d'un point quelconque de ce vecteur limité comme centre, fera partie de E. En désignant par ρ la limite supérieure de r, en portant sur l la longueur $n\rho$ et en faisant tourner l une fois autour de a, nous obtiendrons l'étoile $E^{(n)}$. On voit que l'étoile $E^{(1)}$ est un cercle, que l'étoile $E^{(n+1)}$ renferme l'étoile $E^{(n)}$ et que toutes les étoiles $E^{(1)}, E^{(2)}, E^{(3)}, \ldots$ font partie de l'étoile E.

Soit ensuite α une quantité réelle positive et inférieure à l'unité. Nous considérerons, conjointement avec l'étoile $E^{(n)}$, n autres étoiles $E_\mu^{(n)}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, n)$ obtenues en remplaçant ρ successivement par

$$(4) \qquad \rho_\mu = \alpha^\mu \rho.$$

On voit que $E_\mu^{(n)}$ est situé à l'intérieur de $E_{\mu-1}^{(n)}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, n; E_0^{(n)} = E^{(n)})$.

Soit maintenant $\mathfrak{E}$ une étoile quelconque et soit X un domaine fini situé à l'intérieur de $\mathfrak{E}$, on pourra toujours trouver une étoile finie E concentrique à $\mathfrak{E}$, située toute entière à l'intérieur de $\mathfrak{E}$, et qui renferme à son intérieur tout le domaine X.

En effet, soit X' l'étoile *concentrique* à $\mathfrak{E}$ et *circonscrite* à X. C'est ainsi que nous désignerons une étoile formée de la manière suivante: Si du point a on mène un vecteur quelconque et si l'on désigne par R la limite supérieure des distances de a aux points de ce vecteur qui appartiennent au domaine X, tous les points du vecteur dont la distance à a est inférieure ou égale à R appartiendront à X', tandis que ceux dont la distance à a est supérieure à R n'y appartiendront pas.

Il est évident que l'étoile X' est finie lorsque le domaine X est fini.

Il est de même facile de voir que l'étoile X' est située à l'intérieur de l'étoile $\mathfrak{E}$ si tel est le cas pour le domaine X. En effet, soit δ une quantité positive assez petite pour que «l'entourage δ» d'un point quelconque de X fasse partie de $\mathfrak{E}$. Considérons un point quelconque de X', soit x, et soit r la distance de a à x. Comme précédemment soit R la portion appartenant à X', du vecteur issu de a et passant par x. Puisque le point à l'extrémité de ce vecteur est sur la frontière de X, son entourage δ fera partie de $\mathfrak{E}$, et par conséquent, puisque $\mathfrak{E}$ est une étoile dont le centre est en a, l'entourage $\frac{r}{R}\delta$ de x fera partie de $\mathfrak{E}$. Soit $\mathfrak{R}$ la limite supérieure des R et soit k une quantité positive fixée d'une manière quelconque, on pourra *a fortiori* dire que l'entourage $\frac{k}{\mathfrak{R}}\delta$ du point

[1] Un domaine fini X est dit situé à l'intérieur d'un autre domaine X' s'il existe une quantité positive r telle que, x étant un point quelconque appartenant à X, tous les points x' pour lesquels $|x' - x| < r$ appartiennent à X'; ce qu'on exprime parfois en disant que «l'entourage r» de x appartient à X'.

x fait partie de $\mathfrak{E}$, dès que r, la distance de a à x, n'est pas inférieure à k. Fixons maintenant, ce qui est toujours possible, k de telle manière qu'un cercle décrit du point a comme centre, avec le rayon

$$k\left(1 + \frac{\delta}{\mathfrak{R}}\right) = k + \frac{k}{\mathfrak{R}}\delta,$$

fasse partie de $\mathfrak{E}$. Alors l'entourage $\delta' = \frac{k}{\mathfrak{R}}\delta$ du point x fera partie de $\mathfrak{E}$, même si r est inférieur à k, et il en sera de même, par conséquent, pour toutes les positions du point x à l'intérieur de X'. Donc X' est, comme nous l'avons dit, situé à l'intérieur de $\mathfrak{E}$.

Soit maintenant E l'étoile X' agrandie dans la proportion de $\mathfrak{R}$ à $\mathfrak{R} + \frac{1}{2}\delta'$. L'étoile E sera située toute entière à l'intérieur de $\mathfrak{E}$ et de son côté renfermera le domaine X à son intérieur.

Nous pouvons aller plus loin encore. Il est toujours possible de trouver un nombre entier $\bar{n}$ suffisamment grand pour que X soit situé à l'intérieur de $E^{(n)}$ dès que $n \geqq \bar{n}$. En effet, désignons par δ la limite inférieure des distances entre un point à l'intérieur de E et un point sur la frontière de X; δ sera une quantité réelle et supérieure à zéro. De plus soit $\mathfrak{R}$ le rayon d'un cercle ayant pour centre le point a et qui renferme tout le domaine X. Il suffit de prendre $\bar{n}$ plus grand que $\frac{\mathfrak{R}}{\delta}$ pour être sûr que tout le domaine X sera situé à l'intérieur de $E^{(n)}$ dès que $n \geqq \bar{n}$.

Ayant choisi un nombre $\bar{n}$ qui vérifie cette condition, on pourra encore choisir α en sorte que non seulement $E^{(n)}$ mais encore $E_{\alpha}^{(n)}$ renferme à son intérieur tout le domaine X. En réalité, si nous faisons dépendre α de n de telle sorte que α^n converge vers l'unité quand n croît indéfiniment, il arrivera toujours, à partir d'une certaine valeur de n, que $E_{\alpha}^{(n)}$ renfermera à son intérieur le domaine X.

Ces préliminaires posés, nous supposerons que X est un domaine fini quelconque, situé à l'intérieur de l'étoile A appartenant, au sens défini ci-dessus, aux éléments

$$F(a)\,,\ F'(a)\,,\ F^{(2)}(a)\,,\ \ldots .$$

C'est par rapport à cette étoile A que nous formerons aussi bien

l'étoile finie E qui renferme à son intérieur le domaine X et qui est située elle-même à l'intérieur de A, que l'étoile $E^{(n)}$ et les n étoiles adjointes

$$E_1^{(n)}, E_2^{(n)}, \ldots, E_n^{(n)},$$

l'entier n étant choisi arbitrairement.

Nous supposerons que n soit choisi suffisamment grand pour que $E_n^{(n)}$ renferme à son intérieur le domaine X.

A l'intérieur et sur la frontière de E la limite supérieure des valeurs $|FA(x)|$ sera une quantité finie que nous désignerons par g.

Pour simplifier les formules suivantes, nous conviendrons d'écrire

$$\xi \quad \text{au lieu de } \frac{x-a}{n},$$

$$\xi_\mu \quad \text{au lieu de } a + \mu\frac{x-a}{n}.$$

Nous ferons encore cette convention que dans nos formules $F^{(\mu)}(x)$ signifiera $\frac{d^\mu FA(x)}{dx^\mu}$.

Soit maintenant x un point du domaine X. Fixons le vecteur issu du point a qui passera par x, ainsi que la quantité positive ρ correspondant à ce vecteur, de la manière indiquée à la fin de la page 49. Si maintenant z satisfait à la condition

$$(5) \qquad |z - \xi_{n-1}| \leqq \rho,$$

z sera situé à l'intérieur de E, ou sur sa frontière, et l'on aura

$$(6) \qquad FA(z) = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})(z - \xi_{n-1})^{\lambda_1}.$$

Par conséquent, en vertu d'un théorème connu, développé par WEIERSTRASS dans son mémoire de 1841 *Zur Theorie der Potenzreihen*,[1] on aura

$$(7) \qquad \left|\frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\right| \leqq g\rho^{-\lambda_1}.$$

Le point x appartenant au domaine X appartiendra en même temps

[1] Werke, Bd. 1, page 67.

à $E_1^{(n)}$, et on aura $|\xi| < \rho_1$, où ρ_1 est défini par la formule (4). Par conséquent

$$(8) \qquad \left|\frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\xi^{\lambda_1}\right| \leqq g\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^{\lambda_1} = g\alpha^{\lambda_1}.$$

Si x appartient à l'étoile $E_1^{(n)}$, et si z et z_1 sont choisis conformément aux conditions

$$(9) \qquad \begin{aligned} |z_1 - \xi_{n-2}| &\leqq \rho_1, \\ |z - z_1| &\leqq \rho - \rho_1, \end{aligned}$$

la distance de z au point ξ_{n-2}, situé sur le vecteur allant de a à x, est au plus égale à ρ, et z appartient, par conséquent, à l'intérieur ou à la frontière de E. On aura donc pour toutes les valeurs z qui satisfont à la condition (9)

$$(10) \qquad FA(z) = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(z_1)\cdot(z - z_1)^{\lambda_1}$$

et, par conséquent, en vertu du théorème de WEIERSTRASS on aura

$$(11) \qquad \left|\frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(z_1)\right| \leqq g(\rho - \rho_1)^{-\lambda_1}.$$

Multipliant par $|(z_1 - \xi_{n-2})^{\lambda_1}| \leqq \rho_1^{\lambda_1}$, on obtient immédiatement

$$(12) \qquad \left|\frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(z_1)(z_1 - \xi_{n-2})^{\lambda_1}\right| \leqq g\left(\frac{\rho_1}{\rho - \rho_1}\right)^{\lambda_1} = g\left(\frac{\alpha}{1 - \alpha}\right)^{\lambda_1}.$$

Or on a

$$(13) \qquad F^{(\lambda_1)}(z_1) = \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_2}} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\cdot(z_1 - \xi_{n-2})^{\lambda_2}$$

et, par conséquent,

$$(14) \qquad \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(z_1)(z_1 - \xi_{n-2})^{\lambda_1} = \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})(z_1 - \xi_{n-2})^{\lambda_1+\lambda_2}.$$

Appliquant encore une fois le théorème de WEIERSTRASS nous obtenons, en vertu de (12) et (14)

$$(15) \qquad \left|\frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\right| \leqq g\left(\frac{\alpha}{1 - \alpha}\right)^{\lambda_1} \rho_1^{-(\lambda_1+\lambda_2)}.$$

Le point x étant situé non seulement à l'intérieur de $E_1^{(n)}$ mais encore à l'intérieur de $E_2^{(n)}$, on trouve que $\xi = \frac{x-a}{n}$ est inférieur en valeur absolue à ρ_2, et on aura

$$(16) \qquad \left| \frac{1}{\underline{|\lambda_1} \underline{|\lambda_2}} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2}) \xi^{\lambda_1+\lambda_2} \right| \leqq g\left(\frac{a}{1-a}\right)^{\lambda_1} a^{\lambda_1+\lambda_2}.$$

En continuant de la sorte, nous aurons finalement à considérer une suite de variables $z_{n-1}, z_{n-2}, \ldots z_1, z$ assujetties aux conditions

$$(17) \qquad \begin{cases} |z_{n-1} - a| \leqq \rho_{n-1}, \\ |z_{n-2} - z_{n-1}| \leqq \rho_{n-2} - \rho_{n-1}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ |z_1 - z_2| \leqq \rho_1 - \rho_2, \\ |z - z_1| \leqq \rho - \rho_1. \end{cases}$$

Il est évident que les valeurs admissibles de toutes ces variables appartiennent toutes à l'intérieur ou à la frontière du domaine E.

Nous obtiendrons successivement

$$\begin{cases} FA(z) = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(z_1) . (z - z_1)^{\lambda_1} \\ \left| \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(z_1) \right| \leqq g . (\rho - \rho_1)^{-\lambda_1} \\ \left| \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(z_1) . (z_1 - z_2)^{\lambda_1} \right| \leqq g\left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho - \rho_1}\right)^{\lambda_1} = g\alpha^{\lambda_1} \\ \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(z_1)(z_1 - z_2)^{\lambda_1} = \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_1} \underline{|\lambda_2}} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(z_2) . (z_1 - z_2)^{\lambda_1+\lambda_2} \\ \left| \frac{1}{\underline{|\lambda_1} \underline{|\lambda_2}} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(z_2) \right| \leqq g\alpha^{\lambda_1}(\rho_1 - \rho_2)^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \\ \left| \frac{1}{\underline{|\lambda_1} \underline{|\lambda_2}} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(z_2)(z_2 - z_3)^{\lambda_1+\lambda_2} \right| \leqq g\alpha^{\lambda_1} . \alpha^{\lambda_1+\lambda_2} \end{cases}$$

$$
(18)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{|\underline{\lambda_1}\,|\underline{\lambda_2}} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(z_2)(z_2-z_3)^{\lambda_1+\lambda_2} = \sum_{\lambda_3=0}^{\infty} \frac{1}{|\underline{\lambda_1}\,|\underline{\lambda_2}\,|\underline{\lambda_3}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}(z_3).(z_2-z_3)^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\\
&\left|\frac{1}{|\underline{\lambda_1}\,|\underline{\lambda_2}\,|\underline{\lambda_3}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}(z_3)\right| \leqq g\alpha^{\lambda_1}\alpha^{\lambda_1+\lambda_2}.(\rho_2-\rho_3)^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\left|\frac{1}{|\underline{\lambda_1}\,|\underline{\lambda_2}\cdots|\underline{\lambda_{n-1}}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1})}(z_{n-1})\right|\\
&\qquad\qquad \leqq g\alpha^{\lambda_1}.\alpha^{\lambda_1+\lambda_2}\ldots\alpha^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-2}}(\rho_{n-2}-\rho_{n-1})^{-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1})}\\
&\left|\frac{1}{|\underline{\lambda_1}\,|\underline{\lambda_2}\cdots|\underline{\lambda_{n-1}}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1})}(z_{n-1})(z_{n-1}-a)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1}}\right|\\
&\qquad\qquad \leqq g\alpha^{\lambda_1}.\alpha^{\lambda_1+\lambda_2}\ldots\alpha^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-2}}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1}}\\
&\frac{1}{|\underline{\lambda_1}\,|\underline{\lambda_2}\cdots|\underline{\lambda_{n-1}}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1})}(z_{n-1})(z_{n-1}-a)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1}}\\
&\qquad\qquad = \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \frac{1}{|\underline{\lambda_1}\,|\underline{\lambda_2}\cdots|\underline{\lambda_n}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}(a).(z_{n-1}-a)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}\\
&\left|\frac{1}{|\underline{\lambda_1}\,|\underline{\lambda_2}\cdots|\underline{\lambda_n}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}(a)\right|\\
&\qquad\qquad \leqq g\alpha^{\lambda_1}\alpha^{\lambda_1+\lambda_2}\ldots\alpha^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-2}}.\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1}}.\rho_{n-1}^{-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}
\end{aligned}
\right.
$$

et enfin, x appartenant à $E_n^{(n)}$,

$$
(19)\qquad \left|\frac{1}{|\underline{\lambda_1}\,|\underline{\lambda_2}\cdots|\underline{\lambda_n}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}(a)\xi^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}\right|
$$

$$
\leqq g\alpha^{\lambda_1}.\alpha^{\lambda_1+\lambda_2}\ldots\alpha^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-2}}.\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1}}\alpha^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}.
$$

La condition (5) étant remplie si l'on fait $z = x$, on tire de (6)

$$
(20)\qquad FA(x) = \sum_{\lambda=0}^{m_1} \frac{1}{|\underline{\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\xi^{\lambda_1} + \varepsilon_1
$$

où

$$(21) \qquad \varepsilon_1 = \sum_{\lambda_1 = m_1+1}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\xi^{\lambda_1}.$$

On aura donc, à cause de (8),

$$(22) \qquad |\varepsilon_1| \leqq g \sum_{\lambda_1 = m_1+1}^{\infty} \alpha^{\lambda_1} = g \frac{\alpha^{m_1+1}}{1-\alpha}.$$

De même, les conditions (9) étant remplies en faisant $z_1 = \xi_{n-1}$, $z = z_1$, on aura, en sommant dans (14) par rapport à λ_1 depuis 0 jusqu'à m_1,

$$(23) \qquad \sum_{\lambda_1=0}^{m_1} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\xi^{\lambda_1} = \sum_{\lambda_1=0}^{m_1} \sum_{\lambda_2=0}^{m_2} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\xi^{\lambda_1+\lambda_2} + \varepsilon_2$$

où

$$(24) \qquad \varepsilon_2 = \sum_{\lambda_1=0}^{m_1} \sum_{\lambda_2=m_2+1}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\xi^{\lambda_1+\lambda_2}.$$

On aura, par conséquent, en vertu de (16)

$$(25) \qquad |\varepsilon_2| \leqq g \sum_{\lambda_1=0}^{m_1} \sum_{\lambda_2=m_2+1}^{\infty} \frac{\alpha^{2\lambda_1+\lambda_2}}{(1-\alpha)^{\lambda_1}} = g \frac{\left(\dfrac{\alpha^2}{1-\alpha}\right)^{m_1}}{1-\dfrac{1-\alpha}{\alpha^2}} \left(1-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha^2}\right)^{m_1+1}\right) \cdot \frac{\alpha^{m_2+1}}{1-\alpha}.$$

On démontrera de la même manière les formules suivantes

$$(26) \qquad FA(x) = \sum_{\lambda_1=0}^{m_1} \sum_{\lambda_2=0}^{m_2} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{m_n} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2} \cdots \underline{|\lambda_n}} \cdot F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}(a) \cdot \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}$$
$$+ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_\mu + \ldots + \varepsilon_n$$

où

$$(27) \qquad |\varepsilon_\mu| \leqq g \frac{\left(\dfrac{\alpha^\mu}{1-\alpha}\right)^{m_1}}{1-\dfrac{1-\alpha}{\alpha^\mu}} \cdot \frac{\left(\dfrac{\alpha^{\mu-1}}{1-\alpha}\right)^{m_2}}{1-\dfrac{1-\alpha}{\alpha^{\mu-1}}} \cdots \frac{\left(\dfrac{\alpha^2}{1-\alpha}\right)^{m_{\mu-1}}}{1-\dfrac{1-\alpha}{\alpha^2}}$$

$$\times \left(1-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha^\mu}\right)^{m_1+1}\right)\left(1-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha^{\mu-1}}\right)^{m_2+1}\right) \cdots \left(1-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha^2}\right)^{m_{\mu-1}+1}\right) \frac{\alpha^{m_\mu+1}}{1-\alpha}.$$

La dernière formule pourra s'écrire

$$(28)\quad |\varepsilon_\mu| \leq g \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{\mu-1}\left(1-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha^{\mu-(\nu-1)}}\right)^{m_\nu+1}\right)}{\prod\limits_{\nu=1}^{\mu-1}\left(1-\frac{1-\alpha}{\alpha^{\mu-(\nu-1)}}\right)}\cdot\frac{\alpha^{m_1+1}}{1-\alpha}\cdot\frac{\alpha^{m_1+m_2}}{(1-\alpha)^{m_1}}\cdot\frac{\alpha^{m_1+m_2+m_3}}{(1-\alpha)^{m_2}}\cdots\frac{\alpha^{m_1+m_2+\ldots+m_\mu}}{(1-\alpha)^{m_{\mu-1}}}.$$

Nous avons fait la supposition suivante au sujet de α: c'est une quantité positive plus petite que l'unité, indépendante de x, de a et des constantes (1) mais qui dépend du nombre n, et cela de telle sorte que α^n tende indéfiniment vers l'unité en même temps que le nombre n croît indéfiniment.

Faisons maintenant

$$(29)\qquad \alpha = e^{-\frac{1}{n\omega(n)}}$$

où $\omega(n)$ est une quantité positive qui dépend de n de telle sorte que

$$\lim_{n=\infty}\omega(n)=\infty.$$

On aura

$$(30)\qquad 1-\alpha < \frac{1}{n\omega(n)},$$

dès que n devient suffisamment grand, et de même

$$\alpha^{-\lambda} = e^{\frac{\lambda}{n\omega(n)}} \leq e^{\frac{1}{\omega(n)}} \quad \text{pour } \lambda = 2, 3, \ldots, n.$$

Par conséquent,

$$\frac{1-\alpha}{\alpha^\lambda} \leq \frac{e^{\frac{1}{\omega(n)}}}{n\omega(n)}$$

et

$$\frac{1}{1-\frac{1-\alpha}{\alpha^\lambda}} \leq \frac{1}{1-\frac{e^{\frac{1}{n(\omega)}}}{n\omega(n)}}$$

et enfin

$$\frac{1}{\prod\limits_{\nu=1}^{\mu-1}\left(1-\frac{1-a}{a^{\mu-(\nu-1)}}\right)} \leqq \left(1-\frac{e^{\frac{1}{\omega(n)}}}{n\omega(n)}\right)^{-n}$$

où pour n infini la limite du second membre est l'unité. Puisque

$$\prod_{\nu=1}^{\mu-1}\left(1-\left(\frac{1-a}{a^{\mu-(\nu-1)}}\right)^{m_\nu+1}\right) < 1,$$

on voit que si k est une quantité réelle quelconque supérieure à l'unité on aura pour n suffisamment grand

$$(31) \qquad |\varepsilon_\mu| < gk\frac{a^{m_1+1}}{1-a}\cdot\frac{a^{m_1+m_2}}{(1-a)^{m_1}}\cdot\frac{a^{m_1+m_2+m_3}}{(1-a)^{m_2}}\cdots\frac{a^{m_1+m_2+\ldots+m_\mu}}{(1-a)^{m_{\mu-1}}}.$$

Au moyen de cette formule on reconnait immédiatement, puisque

$$(32) \qquad \frac{a}{1-a} < n\omega(n),$$

qu'en faisant

$$(33) \qquad \begin{cases} m_1 \geqq 2n\omega(n)\log n\omega(n), \\ m_2 \geqq m_1 . n\omega(n)\log n\omega(n), \\ m_1 + m_3 \geqq m_2 . n\omega(n)\log n\omega(n), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ m_1 + m_2 + \ldots + m_{\mu-2} + m_\mu \geqq m_{\mu-1} . n\omega(n)\log n\omega(n), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ m_1 + m_2 + \ldots + m_{n-2} + m_n \geqq m_{n-1} . n\omega(n)\log n\omega(n), \end{cases}$$

on aura

$$(34) \qquad |\varepsilon_\mu| \leqq g.k.\frac{1}{n\omega(n)};\ \mu = 1, 2, \ldots, n$$

et, que par conséquent,

$$(35) \qquad |\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n| < g . k . \frac{1}{\omega(n)} .$$

Si on fait dépendre les entiers $m_1, m_2, \dots, m_n$ de n d'une manière déterminée de telle sorte que les inégalités (33) soient vérifiées, au moins pour les grandes valeurs de n, l'expression

$$(36) \quad g_n(x) = \sum_{\lambda_1=0}^{m_1} \sum_{\lambda_2=0}^{m_2} \dots \sum_{\lambda_n=0}^{m_n} \frac{1}{\underline{|\lambda_1} \, \underline{|\lambda_2} \dots \underline{|\lambda_n}} . F^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)}(a) \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n},$$

qui a la forme

$$(37) \qquad \sum_{(\nu)} c_\nu^{(n)} F^{(\nu)}(a) . (x-a)^\nu$$

où les coefficients $c_\nu^{(n)}$ sont des nombres rationnels qui dépendent seulement de n et de ν, aura la propriété très remarquable que voici:

Si A est l'étoile qui appartient aux éléments

$$F(a) , F'(a) , F^{(2)}(a) , \dots ,$$

si X est un domaine quelconque situé à l'intérieur de A et si σ est une quantité positive donnée, on pourra trouver un nombre $\bar{n}$ tel que l'inégalité

$$|FA(x) - g_n(x)| < \sigma$$

soit satisfaite pour tous les x qui appartiennent à X, pourvu que n soit supérieur à $\bar{n}$.

Nous pouvons résumer au moyen du théorème suivant le résultat que nous avons obtenu:

Théorème 1. *Désignons par A l'étoile appartenant aux éléments*

$$F(a) , F'(a) , F^{(2)}(a) , \dots$$

et par $FA(x)$ la branche fonctionnelle correspondante qui appartient à ces mêmes éléments, et soit X un domaine fini quelconque à l'intérieur de A et σ une quantité positive aussi petite que l'on voudra.

Il est toujours possible de trouver un nombre entier $\bar{n}$ tel, que la différence entre $FA(x)$ et le polynôme

$$(38) \qquad g_n(x) = \sum_\nu c_\nu^{(n)} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu$$

soit, dès que n surpasse $\bar{n}$, inférieure à σ en valeur absolue pour toutes les valeurs de x appartenant au domaine X.

Les coefficients $c_\nu^{(n)}$ peuvent être choisis à priori et sont absolument indépendants de a, de $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, $F^{(2)}(a)$, ... et de x.

De l'expression (36) on tire pour les $c_\nu^{(n)}$ la formule

$$(39) \qquad c_\nu^{(n)} = \frac{1}{n^\nu} \sum_{(\lambda)} \frac{1}{\underline{|\lambda_1} \underline{|\lambda_2} \dots \underline{|\lambda_n}}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ parcourent tous les entiers positifs, le nombre zéro y compris, qui verifient les conditions

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \nu,$$
$$\lambda_1 \leqq m_1, \lambda_2 \leqq m_2, \dots, \lambda_n \leqq m_n$$

où $m_1, m_2, \dots, m_n$ sont des entiers positifs dépendant de n.

La dépendance des nombres $m_1, m_2, \dots, m_n$ du nombre n peut être fixée d'une infinité de manières différentes. Il faudra seulement la choisir telle que l'inégalité (35) soit vérifiée.

Nous avons vu que l'inégalité (35) a lieu dès que les $m_1, m_2, \dots, m_n$ sont choisis de manière à vérifier les inégalités (33).

Ces inégalités subsistent pour des valeurs suffisamment grandes de n si l'on pose

$$(40) \qquad m_\mu = n^{2\mu}; \ \mu = 1, 2, \dots, n.$$

En choisissant cette détermination pour les m_μ, le polynôme $g_n(x)$ prend la forme très simple

$$g_n(x) = \sum_{\lambda_1=0}^{n^2} \sum_{\lambda_2=0}^{n^4} \dots \sum_{\lambda_n=0}^{n^{2n}} \frac{1}{\underline{|\lambda_1} \underline{|\lambda_2} \dots \underline{|\lambda_n}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)}(a) \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n}.$$

La forme (39) que nous avons obtenue pour les $c_\nu^{(n)}$ est loin d'être la seule possible. Il y a au contraire un nombre indéfini d'autres formes

qui répondent à des conditions spéciales. Il y a lieu de considérer entr'autres pour les $c_\nu^{(n)}$ des expressions qui sont formées à l'aide des deux célèbres transcendantes e et π.[1]

Il est maintenant facile d'obtenir le théorème que nous avons mis en tête de ce travail.

En effet, posons

$$\left|\begin{array}{l} G_0(x) = g_0(x) = F(a), \\ G_\mu(x) = g_\mu(x) - g_{\mu-1}(x); \quad \mu = 1, 2, \ldots, \infty. \end{array}\right. \tag{42}$$

On a

$$\sum_{\mu=0}^{n} G_\mu(x) = g_n(x). \tag{43}$$

Par conséquent, x étant un point quelconque à l'intérieur de A, et σ étant une quantité positive aussi petite que l'on voudra, on aura en choisissant n suffisamment grand,

$$\left| FA(x) - \sum_{\mu=0}^{n} G_\mu(x) \right| < \sigma. \tag{44}$$

L'égalité

$$FA(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} G_\mu(x) \tag{45}$$

a donc lieu pour chaque point à l'intérieur de A.

La série

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} G_\mu(x) \tag{46}$$

est uniformément convergente pour chaque domaine à l'intérieur de A. En effet pour un tel domaine on a en même temps

$$\left\{\begin{array}{ll} \left| FA(x) - \sum_{\mu=0}^{n} G_\mu(x) \right| < \sigma, & \text{le nombre } n \text{ étant suffisamment grand} \\ \left| FA(x) - \sum_{\mu=0}^{n+m} G_\mu(x) \right| < \sigma, & \text{le nombre } m \text{ étant un nombre entier positif quelconque} \end{array}\right. \tag{47}$$

[1] De telles expressions ont été étudiées dans les deux notes déjà citées: *Om en generalisering af potensserien* et *Om den analytiska framställningen af en allmän monogen funktion*, Tredje meddelandet.

et, par conséquent,

$$(48)\qquad \left|\sum_{\mu=n+1}^{n+m} G_\mu(x)\right| < 2\sigma.$$

Nous avons donc obtenu le théorème suivant:

Théorème 2. *Désignons par A l'étoile qui appartient aux éléments*

$$F(a)\,,\; F'(a)\,,\; F^{(2)}(a)\,,\,\ldots$$

et par $FA(x)$ la branche fonctionnelle correspondante qui appartient à ces mêmes éléments.

Cette branche $FA(x)$ pourra toujours être représentée par une série

$$(46)\qquad \sum_{\mu=0}^{\infty} G_\mu(x)$$

où les $G_\mu(x)$ sont des polynômes de la forme

$$G_\mu(x) = \sum_{(\nu)} c_\nu^{(\mu)} F^{(\nu)}(a).(x-a)^\nu,$$

chaque coefficient $c_\nu^{(\mu)}$ étant un nombre rationnel déterminé qui ne dépend que de ν et de μ.

La série

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} G_\mu(x)$$

est convergente pour chaque valeur de x à l'intérieur de A et elle est uniformément convergente pour chaque domaine à l'intérieur de A.

On aura partout à l'intérieur de A

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} G_\mu(x) = \lim_{n=\infty} g_n(x)$$

où $g_n(x)$ désigne le même polynôme que dans le théorème 1.

SUR LES PRINCIPES DE LA MÉCANIQUE.

Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur

PAR

LEO KÖNIGSBERGER
à HEIDELBERG.

[Traduit de l'allemand par L. Laugel.]

Ce n'est qu'aujourd'hui, à mon retour d'un assez long voyage d'agrément, que je puis donner suite aux demandes amicales, que vous m'avez faites verbalement et par écrit, de vous communiquer les résultats essentiels des recherches que j'ai entreprises l'an dernier sur les principes de la mécanique. Je vais essayer, bien qu'assez rapidement, de mettre en évidence quelques points qui pourront peut-être inspirer en général de l'intérêt.

L'établissement de la loi de WEBER sur l'action entre points matériels électrisés avait exigé l'introduction de forces qui dépendent non seulement de la situation des points mais encore de leurs vitesses et de leurs accélérations, et KIRCHHOFF, HERTZ et autres ont à mainte reprise admis la possibilité de forces, définies par des fonctions des coordonnées et de leurs dérivées d'ordre quelconque prises par rapport au temps. C'est principalement la loi de WEBER qui, dans l'étude du potentiel cinétique, défini par l'expression $H = -T - U$, où T désigne la force vive de la matière pondérable et U la fonction des forces — ces mots pris dans leur sens habituel en mécanique — a conduit C. NEUMANN à soulever la question de savoir comment doit être formé U au moyen des coordonnées et de leurs dérivées premières, quand on admet que le principe de HAMILTON reste valable. Une méthode de nature essentiellement différente et d'une portée très grande en principe, est celle, introduite en mécanique par HELMHOLTZ, du traitement du potentiel cinétique comme fonction des coordonnées et de leurs dérivées premières, méthode qui ne

met pas immédiatement en évidence une séparation de l'énergie actuelle et de l'énergie potentielle, mais qui détermine d'une manière univoque la quantité d'énergie de l'ensemble du système, et qui fournit encore la fonction fondamentale qui a été l'origine des développements de la théorie des mouvements cachés établie par HELMHOLTZ et reprise par HERTZ.

Si l'on examine avec un peu plus d'attention les considérations exposées par C. NEUMANN, on est très rapidement conduit à des résultats beaucoup plus généraux, qui révèlent la source propre des théorèmes antérieurs, et qui de plus permettent aussi d'étendre les recherches de HELMHOLTZ à des forces appartenant à des potentiels cinétiques qui dépendent de dérivées d'ordre quelconque.

Après avoir, pour une fonction

$$R = f(t, x, y, z, \ldots),$$

où $x, y, z, \ldots$ dépendent de t, développé la relation

$$\frac{\partial R^{(\rho)}}{\partial x^{(\lambda)}} = \frac{\rho(\rho-1)\ldots(\rho-\lambda+1)}{1.2\ldots\lambda}\frac{\partial R^{(\rho-\lambda)}}{\partial x}$$

et l'identité

$$\frac{\partial R^{(\rho)}}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial R^{(\rho)}}{\partial x'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial R^{(\rho)}}{\partial x''} + \ldots + (-1)^\rho \frac{d^\rho}{dt^\rho}\frac{\partial R^{(\rho)}}{\partial x^{(\rho)}} = 0,$$

que l'on en tire, on obtient, pour chaque fonction

$$V = F(t, R_1, R_1', R_1'', \ldots, R_1^{(\nu)}, R_2, R_2', \ldots, R_2^{(\nu)}, \ldots)$$

où $R_1, R_2, \ldots$ sont des fonctions de t et des μ grandeurs $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$, qui elles-mêmes doivent encore être regardées comme fonctions de t, la relation

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V}{\partial p_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial p_s'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial V}{\partial p_s''} - \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial V}{\partial p_s^{(\nu)}} \\
&= \left(\frac{\partial V}{\partial R_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial R_1'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial V}{\partial R_1''} - \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial V}{\partial R_1^{(\nu)}}\right)\frac{\partial R_1}{\partial p_s} \\
&+ \left(\frac{\partial V}{\partial R_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial R_2'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial V}{\partial R_2''} - \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial V}{\partial R_2^{(\nu)}}\right)\frac{\partial R_2}{\partial p_s} \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

sur laquelle reposent les recherches qui suivent.

Supposons maintenant que n points d'un système ayant pour coordonnées $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$ soient soumis aux conditions restrictives exprimées par les m équations linéaires homogènes par rapport aux déplacements virtuels

$$f_{\lambda 1}\delta x_1 + \varphi_{\lambda 1}\delta y_1 + \psi_{\lambda 1}\delta z_1 + f_{\lambda 2}\delta x_2 + \varphi_{\lambda 2}\delta y_2 + \psi_{\lambda 2}\delta z_2 + \ldots$$
$$+ f_{\lambda n}\delta x_n + \varphi_{\lambda n}\delta y_n + \psi_{\lambda n}\delta z_n = 0, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, m)$$

et que, H désignant une fonction donnée de t, des $3n$ coordonnées et de leurs dérivées prises par rapport au temps jusqu'à l'ordre ν, les variables soient pendant le cours du temps t, variable indépendante, soumises au principe de d'Alembert généralisé; on aura:

$$\sum_1^n {}_k \left\{ \frac{\partial H}{\partial x_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x_k'} + \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial x_k^{(\nu)}} - Q_k \right\} \delta x_k$$
$$+ \sum_1^n {}_k \left\{ \frac{\partial H}{\partial y_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial y_k'} + \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial y_k^{(\nu)}} - R_k \right\} \delta y_k$$
$$+ \sum_1^n {}_k \left\{ \frac{\partial H}{\partial z_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial z_k'} + \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial z_k^{(\nu)}} - S_k \right\} \delta z_k = 0,$$

où Q_k, R_k, S_k sont des fonctions données du temps et des coordonnées, et où H, par analogie avec la mécanique, peut être nommé le potentiel cinétique. *D'où s'ensuit aisément la première forme des équations de Lagrange généralisées*

$$\frac{\partial H}{\partial x_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x_k'} + \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial x_k^{(\nu)}} - Q_k + \lambda_1 f_{1k} + \lambda_2 f_{2k} + \ldots + \lambda_m f_{mk} = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial y_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial y_k'} + \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial y_k^{(\nu)}} - R_k + \lambda_1 \varphi_{1k} + \lambda_2 \varphi_{2k} + \ldots + \lambda_m \varphi_{mk} = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial z_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial z_k'} + \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial z_k^{(\nu)}} - S_k + \lambda_1 \psi_{1k} + \lambda_2 \psi_{2k} + \ldots + \lambda_m \psi_{mk} = 0,$$

tandis que le théorème auxiliaire précité fournit, sous l'hypothèse de l'inté-

grabilité des précédentes équations aux variations, la seconde forme des équations de Lagrange généralisées

$$\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'_s} + \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} + P_s = 0 \qquad (s=1,2,\ldots,\mu)$$

où l'on a posé

$$P_s = -\sum_1^n{}^k \left\{ Q_k \frac{\partial x_k}{\partial p_s} + R_k \frac{\partial y_k}{\partial p_s} + S_k \frac{\partial z_k}{\partial p_s} \right\}.$$

Maintenant nous pouvons donner une autre interprétation à ces équations. On nommera adjointe à une fonction

$$F(r_1, r'_1, \ldots, r_1^{(\nu)}, r_2, r'_2, \ldots, r_2^{(\nu)}, \ldots, r_k, r'_k, \ldots, r_k^{(\nu)}),$$

où $r_1, r_2, \ldots, r_k$ dépendent d'une variable t, une autre fonction f formée au moyen de r, $\frac{\partial F}{\partial r}$, $\frac{\partial F}{\partial r'}$, ..., $\frac{\partial F}{\partial r^{(\nu)}}$ et de leurs dérivées prises par rapport à t jusqu'à un ordre quelconque, quand celle-ci lors de la transformation des variables $r_1, r_2, \ldots, r_k$ en μ autres $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$, jouit de la propriété que ladite fonction, formée au moyen de p_s, $\frac{\partial F}{\partial p_s}$, $\frac{\partial F}{\partial p'_s}$, ..., $\frac{\partial F}{\partial p_s^{(\nu)}}$ et de leurs dérivées totales, est égale à la somme des projections des fonctions f, qui appartiennent à $r_1, r_2, \ldots, r_k$ prises sur la direction de p_s, et par conséquent vérifie l'équation

$$f\left(p_s, p'_s, \ldots, \frac{\partial F}{\partial p_s}, \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial p_s}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial p'_s}, \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial p'_s}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial p_s^{(\nu)}}, \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial p_s^{(\nu)}}, \ldots\right)$$

$$= \sum_1^k{}^\varepsilon f\left(r_\varepsilon, r'_\varepsilon, \ldots, \frac{\partial F}{\partial r_\varepsilon}, \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial r_\varepsilon}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial r'_\varepsilon}, \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial r'_\varepsilon}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial r_\varepsilon^{(\nu)}}, \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial r_\varepsilon^{(\nu)}}, \ldots\right)\frac{\partial r_\varepsilon}{\partial p_s},$$

en sorte que

$$-\frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x'_i}, \quad -\frac{\partial T}{\partial y_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial y'_i}, \quad -\frac{\partial T}{\partial z_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial z'_i}$$

sont fonctions adjointes de la force vive.

Maintenant si l'on soulève en outre la question *de savoir quelles sont toutes les fonctions adjointes, appartenant à chaque fonction F quelconque et*

*valables pour **chaque** choix **arbitraire** des transformations, on reconnait qu'il existe toujours $\nu + 1$ et seulement $\nu + 1$ fonctions adjointes de la forme*

$$\frac{\partial F}{\partial r^{(\nu-\lambda)}} - (\nu - \lambda + 1)\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial r^{(\nu-\lambda+1)}} + \frac{(\nu-\lambda+2)(\nu-\lambda+1)}{1.2}\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial F}{\partial r^{(\nu-\lambda+2)}} - \cdots$$
$$+ (-1)^\nu \frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-\lambda+1)}{1.2\ldots\lambda}\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial F}{\partial r^{(\nu)}}, \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \nu)$$

et, si l'on nomme, d'une manière tout à fait générale, F désignant le potentiel cinétique H — par analogie avec le moment de mouvement, introduit par Helmholtz, $\frac{\partial H}{\partial p'_s}$, quand H ne dépend que des dérivées premières — les ν expressions

$$\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu-\lambda)}} - (\nu - \lambda + 1)\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu-\lambda+1)}} + \cdots$$
$$+ (-1)^\nu \frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-\lambda+1)}{1.2\ldots\lambda}\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}, \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1)$$

les moments de mouvement, et cette expression pour $\lambda = \nu$ *la force,* on voit alors que *la force — abstraction faite des moments — est l'unique fonction adjointe, appartenant à **chaque** potentiel cinétique dépendant des coordonnées et de leurs dérivées d'ordre quelconque, qui existe pour des conditions restrictives **arbitraires** imposées au système libre;* en même temps les équations de Lagrange sous leur seconde forme peuvent être remplacées par le simple énoncé suivant: *La force agissant sur la coordonnée p_s pendant le mouvement est égale à la somme des projections des forces agissant sur le système libre sur la direction de p_s.*

La question suivante qui se présente alors est relative à la valabilité des principes de la mécanique pour la définition généralisée de force et pour les équations de Lagrange généralisées. On voit d'abord immédiatement que *dans le cas où le potentiel cinétique H dépend d'une manière toute générale des coordonnées et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre ν inclus, le principe de Hamilton, représenté par l'équation*

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(H + \sum_1^\mu{}^\lambda P_\lambda p_\lambda\right) dt = 0$$

est équivalent à la seconde forme des équations de Lagrange généralisées;

et on voit ensuite, quand le potentiel cinétique ne renferme pas explicitement le temps t et que la quantité d'énergie E du système est définie par l'expression

$$E = H - \sum_1^\mu p'_\iota \left\{ \frac{\partial H}{\partial p'_\iota} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p''_\iota} + \ldots + (-1)^{\nu-1}\frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\frac{\partial H}{\partial p^{(\nu)}_\iota} \right\}$$

$$- \sum_1^\mu p''_\iota \left\{ \frac{\partial H}{\partial p''_\iota} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'''_\iota} + \ldots + (-1)^{\nu-2}\frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}}\frac{\partial H}{\partial p^{(\nu)}_\iota} \right\}$$

$$- \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$- \sum_1^\mu p^{(\nu)}_\iota \frac{\partial H}{\partial p^{(\nu)}_\iota},$$

que le principe généralisé de la conservation de la force vive prend la forme

$$E + \sum_1^\mu \int P_\iota p'_\iota dt = h,$$

expression d'où l'on déduit immédiatement le principe de la force vive pour la loi de Weber, tel que l'a développé C. NEUMANN.

Relativement aux relations entre la quantité d'énergie et le potentiel cinétique je ne ferai ressortir ici que ce point: *Lorsque H ne dépend que des coordonnées et de leurs dérivées premières, la quantité d'énergie d'un système détermine le potentiel cinétique à une fonction près linéaire par rapport aux dérivées premières des coordonnées;* je citerai seulement la question qui se présente relativement à la forme des expressions du potentiel cinétique et des valeurs correspondantes de la quantité d'énergie dans un même problème.

Pour reconnaître l'exactitude des principes mécaniques généralisés il faut étudier d'abord le principe de GAUSS de la moindre contrainte, qui fournit le mouvement invariable du système, lequel sous l'hypothèse de la conservation de la force vive exige le principe fondamental de Hertz énoncant que le système doit suivre avec une vitesse restant la même une de ses trajectoires les plus rectilignes, et, *pour le principe de Gauss de la moindre contrainte généralisé, qui est équivalent aux équations de Lagrange généralisées, j'obtiens ce théorème que la somme*

$$M = \sum_1^n{}_k \frac{1}{-\frac{\partial^2 H}{\partial x_k^{(\nu)2}}} \left\{ \frac{\partial H}{\partial x_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x_k'} + \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial x_k^{(\nu)}} - Q_k \right\}^2$$

$$+ \sum_1^n{}_k \frac{1}{-\frac{\partial^2 H}{\partial y_k^{(\nu)2}}} \left\{ \frac{\partial H}{\partial y_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial y_k'} + \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial y_k^{(\nu)}} - R_k \right\}^2$$

$$+ \sum_1^n{}_k \frac{1}{-\frac{\partial^2 H}{\partial z_k^{(\nu)2}}} \left\{ \frac{\partial H}{\partial z_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial z_k'} + \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial z_k^{(\nu)}} - S_k \right\}^2$$

prend une valeur minimum, pour les valeurs, comprises parmi toutes les valeurs de $x_k^{(2\nu)}, y_k^{(2\nu)}, z_k^{(2\nu)}$, — *les valeurs*

$$x_k, y_k, z_k, x_k', y_k', z_k', \ldots, x_k^{(2\nu-1)}, y_k^{(2\nu-1)}, z_k^{(2\nu-1)}$$

étant conservées —, qui satisfont aux équations du mouvement de Lagrange, lorsque les quantités

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_k^{(\nu)2}}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial y_k^{(\nu)2}}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial z_k^{(\nu)2}}$$

sont toutes négatives, et que les conditions données pour les coordonnées sont conservées pour les systèmes de valeurs comparés.

Le développement du *principe de la moindre action généralisé* rend nécessaire la séparation de la forme de Lagrange et de la forme de Jacobi, et *j'obtiens la forme la plus générale de ce principe exprimée par l'équation*

$$\delta\int_{t_0}^{t} \sum_1^\mu{}_s \Bigg\{ p_s' \left[\frac{\partial H}{\partial p_s'} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_s''} + \ldots + (-1)^{\nu-1}\frac{d^{\nu-1}}{\partial t^{\nu-1}}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right]$$

$$+ p_s''\left[\frac{\partial H}{\partial p_s''} - \ldots + (-1)^{\nu-2}\frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right] + \ldots + p_s^{(\nu)}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\Bigg\} dt$$

$$= -\int_{t_0}^{t} \delta E dt - \int_{t_0}^{t}\sum_1^\mu{}_s P_s \delta p_s dt + \Bigg[\sum_1^\mu{}_s \Bigg\{\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'} - \ldots + (-1)^{\nu-1}\frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right)\delta p_s$$

$$+ \left(\frac{\partial H}{\partial p_s''} - \ldots + (-1)^{\nu-2}\frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right)\delta p_s' + \ldots + \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\delta p_s^{(\nu-1)}\Bigg\}\Bigg]_{t_0}^{t},$$

où l'on suppose que H ne contient pas explicitement le temps t, équation qui, dans le cas où le potentiel cinétique ne renferme que les dérivées premières des coordonnées, et où par conséquent $E = h - \int \sum_1^\mu P_s dp_s$, se transforme en

$$\delta \int_{t_0}^{t} \sum_1^\mu p'_s \frac{\partial H}{\partial p'_s} dt = -\int_{t_0}^{t} \delta E\, dt - \int_{t_0}^{t} \sum_1^\mu P_s \delta p_s dt + \left[\sum_1^\mu \frac{\partial H}{\partial p'_s} \delta p_s \right]_{t_0}^{t},$$

et qui dans le cas où H désigne la fonction caractéristique de Hamilton, fournit le principe de la moindre action.

Il est alors facile de trouver la source des théorèmes qui, dans la mécanique habituelle définissent les deux principes qui restent encore; d'abord *comme principe généralisé de la conservation des aires l'on a ce théorème: Lorsque le potentiel cinétique a la forme*

$$H = \omega(x_k^2 + y_k^2, x_k'^2 + y_k'^2, \ldots, x_k^{(\nu)2} + y_k^{(\nu)2})$$
$$+ \Omega(t, R_1, R_1', \ldots, R_1^{(\nu)}, R_2, R_2', \ldots, R_2^{(\nu)}, \ldots),$$

où ω *et* Ω *sont des fonctions quelconques des grandeurs entre parenthèse et de* $z_1, z_2, \ldots, z_n$, *et où* $R_1, R_2, \ldots$ *désignent des fonctions de* $t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ *pour lesquelles on a*

$$\sum_1^n {}_k \left(y_k \frac{\partial R_\mu}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial R_\mu}{\partial y_k} \right) = 0,$$

et lorsqu'en outre les forces extérieures aussi bien que les fonctions $f_{\mu k}, \varphi_{\mu k}, \psi_{\mu k}$, *qui définissent les contraintes du système, satisfont aux conditions*

$$\sum_1^n {}_k (y_k Q_k - x_k R_k) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_1^n {}_k (y_k f_{\mu k} - x_k \varphi_{\mu k}) = 0,$$

on obtient alors comme intégrale des équations du mouvement l'équation différentielle du $(2\nu - 1)^{\text{ème}}$ *ordre*

$$\sum_1^n {}_k \sum_1^\nu {}_r (-1)^r \sum_0^{r-1} {}_\lambda (-1)^\lambda \left\{ y_k^{(\lambda)} \frac{d^{r-\lambda-1}}{dt^{r-\lambda-1}} \frac{\partial \omega}{\partial x_k^{(r)}} - x_k^{(\lambda)} \frac{d^{r-\lambda-1}}{dt^{r-\lambda-1}} \frac{\partial \omega}{\partial y_k^{(r)}} \right\} = c,$$

qui pour le potentiel habituel se transforme en le théorème connu des aires, et qui peut aussi être aisément étendu au cas où dans le potentiel cinétique l'énergie actuelle et l'énergie potentielle ne sont pas encore séparées. Enfin *nous obtenons le principe de la conservation du mouvement du centre de gravité, étendu à des potentiels cinétiques arbitraires sous la forme suivante:*

Lorsque le potentiel cinétique a la forme

$$H = \omega(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2, x_k'^2 + y_k'^2 + z_k'^2, \ldots, x_k^{(\nu)2} + y_k^{(\nu)2} + z_k^{(\nu)2})$$
$$+ \omega_1(t, x_\rho - x_\sigma, \ldots, x_\rho^{(\nu)} - x_\sigma^{(\nu)}, y_\rho - y_\sigma, \ldots, y_\rho^{(\nu)} - y_\sigma^{(\nu)}, z_\rho - z_\sigma, \ldots, z_\rho^{(\nu)} - z_\sigma^{(\nu)}),$$

et que ω *est une fonction linéaire des arguments* $x_k^{(r)2} + y_k^{(r)2} + z_k^{(r)2}$ *à coefficients constants* a_{kr}, *entre les grandeurs*

$$2(a_{1r}x_1 + a_{2r}x_2 + \ldots + a_{nr}x_n) = A_r, \qquad 2(a_{1r}y_1 + a_{2r}y_2 + \ldots + a_{nr}y_n) = B_r,$$
$$2(a_{1r}z_1 + a_{2r}z_2 + \ldots + a_{nr}z_n) = C_r$$

ont lieu des relations

$$A_0 - A_1'' + A_2'''' - \ldots + (-1)^\nu A_\nu^{(2\nu)} - \sum_1^n {}_k Q_k = 0,$$

$$B_0 - B_1'' + B_2'''' - \ldots + (-1)^\nu B_\nu^{(2\nu)} - \sum_1^n {}_k R_k = 0,$$

$$C_0 - C_1'' + C_2'''' - \ldots + (-1)^\nu C_\nu^{(2\nu)} - \sum_1^n {}_k S_k = 0;$$

pour $a_{1r} = -\frac{m_1}{2}$, $a_{2r} = -\frac{m_2}{2}$, $\ldots$, $a_{nr} = -\frac{m_n}{2}$, $A_r = -MA$, $B_r = -MB$, $C_r = -MC$, *les équations différentielles du mouvement du centre de gravité sont*

$$M\{-A + A'' - \ldots + (-1)^\nu A^{(2\nu)}\} - \sum_1^n {}_k Q_k = 0,$$

$$M\{-B + B'' - \ldots + (-1)^\nu B^{(2\nu)}\} - \sum_1^n {}_k R_k = 0,$$

$$M\{-C + C'' - \ldots + (-1)^\nu C^{(2\nu)}\} - \sum_1^n {}_k S_k = 0,$$

et par conséquent

$$\overline{H} = -\frac{M}{2}\{A^2 + B^2 + C^2 + A'^2 + B'^2 + C'^2 + \ldots + A^{(\nu)2} + B^{(\nu)2} + C^{(\nu)2}\}$$

est le potentiel cinétique du mouvement du centre de gravité, lorsque la masse totale est concentrée en ce point et que les composantes de la force $\sum_1^n{}_k Q_k$, $\sum_1^n{}_k R_k$, $\sum_1^n{}_k S_k$ *agissent sur le point.*

Après avoir établi les principes généralisés de la mécanique je me suis appliqué à une recherche purement analytique, afin de voir jusqu'à quel point sont liés à la forme que donne par hypothèse Helmholtz au potentiel cinétique, les théorèmes, énoncés dans son célèbre travail *die physikalische Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung*, sur la relation entre les forces P_s d'une part, telles qu'elles sont données par les équations de Lagrange comme fonctions des coordonnées et de leur dérivées, et entre les accélérations, les vitesses et les coordonnées d'autre part. Dans l'hypothèse d'une composition arbitraire du potentiel cinétique, lorsque les dérivées s'étendent jusqu'à l'ordre ν, j'obtiens les relations suivantes tout à fait analogues

$$\frac{\partial P_s}{\partial p_\sigma^{(2\nu)}} = \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_s^{(2\nu)}},$$

$$\frac{\partial P_s}{\partial p_\sigma^{(2\nu-1)}} - \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_s^{(2\nu-1)}} = (-1)^{\nu+1}\, 2\left\{\frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu)}\partial p_\sigma^{(\nu-1)}} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_\sigma^{(\nu)}\partial p_s^{(\nu-1)}}\right\},$$

$$\frac{\partial P_s}{\partial p_\sigma^{(2\nu-1)}} + \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_s^{(2\nu-1)}} = 2\nu\frac{d}{dt}\frac{\partial P_s}{\partial p_\sigma^{(2\nu)}} = 2\nu\frac{d}{dt}\frac{\partial P_\sigma}{\partial p_s^{(2\nu)}},$$

$$\frac{\partial P_s}{\partial p_\sigma^{(2\nu-2)}} - \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_s^{(2\nu-2)}} = \frac{2\nu-1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial P_s}{\partial p_\sigma^{(2\nu-1)}} - \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_s^{(2\nu-1)}}\right\}$$

etc. et enfin

$$\frac{\partial P_s}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_s} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\frac{\partial H}{\partial p_\sigma}}{\partial p_s'} - \frac{\partial\frac{\partial H}{\partial p_s}}{\partial p_\sigma'}\right] - \frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\partial\frac{\partial H}{\partial p_\sigma}}{\partial p_s''} - \frac{\partial\frac{\partial H}{\partial p_s}}{\partial p_\sigma''}\right] + \cdots$$
$$- (-1)^\nu\frac{d^\nu}{dt^\nu}\left[\frac{\partial\frac{\partial H}{\partial p_\sigma}}{\partial p_s^{(\nu)}} - \frac{\partial\frac{\partial H}{\partial p_s}}{\partial p_\sigma^{(\nu)}}\right];$$

après avoir ainsi démontré que les théorèmes de Helmholtz, dont il a donné d'importantes interprétations en Physique et en Mécanique, n'ont rien à faire avec le caractère que possède le potentiel cinétique de dépendre seulement des dérivées premières des coordonnées, je puis aborder la démonstration du théorème relatif au potentiel cinétique restreint, énoncé par lui sans preuve, et qui repose, ainsi qu'il le fait ressortir, sur la théorie des fonctions potentielles dans un espace à trois dimensions, théorème d'après lequel, lorsque les expressions de la force P_s satisfont aux équations de condition, il existe toujours un potentiel cinétique, au moyen duquel les forces peuvent s'exprimer sous la forme de Lagrange. En vue de simplifier l'exposition j'ai développé cette démonstration seulement pour des potentiels cinétiques au sens de Helmholtz et pour deux coordonnées indépendantes, mais on peut par la même voie en établir la légitimité pour des potentiels cinétiques de forme toute générale. En employant les relations précédentes entre P_s et les coordonnées, vitesses, etc., l'énoncé relatif à l'existence d'un potentiel cinétique peut être exprimé comme il suit: *Lorsque les expressions P_s sont des fonctions de $p_1, p_2, p_1', p_2', p_1'', p_2''$, linéaires par rapport aux dérivées secondes des coordonnées, telles que les trois équations de condition*

$$\frac{\partial P_s}{\partial p_\sigma''} = \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_s''}, \qquad \frac{\partial P_s}{\partial p_\sigma'} + \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_s'} = \frac{d}{dt}\frac{\partial P_\sigma}{\partial p_s''}, \qquad \frac{\partial P_s}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_s} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial P_s}{\partial p_\sigma'} - \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_s'}\right\}$$

soient satisfaites, il existe toujours une fonction H, ne renfermant pas t, des grandeurs p_1, p_2, p_1', p_2', qui vérifie les deux équations différentielles

$$P_1 = -\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_1'}, \qquad P_2 = -\frac{\partial H}{\partial p_2} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_2'}.$$

La démonstration du théorème peut être effectuée en mettant P_s sous la forme

$$P_s = f_{0s}(p_1, p_2, p_1', p_2') + f_{1s}(p_1, p_2, p_1', p_2')p_1'' + f_{2s}(p_1, p_2, p_1', p_2')p_2''$$

et en tirant des équations de conditions ci-dessus les relations entre les dérivées des fonctions f_{0s}, f_{1s}, f_{2s}, à l'aide desquelles l'on intégrera les équations de Lagrange précédentes regardées comme équations aux dérivées partielles en H, et de la sorte l'on pourra établir, non seulement l'existence du potentiel cinétique, mais encore sa forme.

A cette recherche se rattache la question des transformations analytiques du potentiel cinétique. Dans son travail déjà cité Helmholtz a fait ressortir deux cas d'équations du mouvement où se présente une diminution dans le nombre des coordonnées, et cela non comme d'habitude parceque la liberté du mouvement du système est soumis à des restrictions, qui s'expriment par des équations entre les coordonnées, mais plutôt à cause de la propriété spéciale du potentiel cinétique et à cause de la nature des équations du mouvement de Lagrange. L'hypothèse, que le potentiel cinétique $H = - T - U$ ne renferme pas $p_1, p_2, \ldots, p_\rho$ et que les forces extérieures correspondantes s'évanouissent, permit à Helmholtz de conclure, qu'en éliminant $p'_1, p'_2, \ldots, p'_\rho$ entre les équations de Lagrange correspondantes, les $\mu - \rho = \sigma$ équations du mouvement restantes prennent, quand on a posé $p_{\rho+\sigma} = \mathfrak{p}_s$, la forme

$$-\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{p}_s} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{p}'_s} = \mathfrak{P}_s \qquad (s=1,2,\ldots,\sigma)$$

où

$$\mathfrak{H} = (H) - c_1(p'_1) - c_2(p'_2) - \ldots - c_\rho(p'_\rho),$$

les grandeurs entre parenthèses désignant les valeurs que doivent prendre ces grandeurs après que l'on a exécuté la substitution et $c_1, \ldots, c_\rho$ étant des constantes d'intégration. Le potentiel cinétique $\mathfrak{H}$ renferme ici aussi des termes du premier degré par rapport aux vitesses, et ce cas, par une analogie donnée par la mécanique des corps pondérables, ainsi que d'autres cas appartenant à la physique où le potentiel cinétique renferme aussi des termes linéaires par rapport aux vitesses, Helmholtz les nomme *cas à mouvements cachés*, cas sur lesquels lui aussi bien que Hertz ont édifié une belle et vaste théorie. Outre ce cas Helmholtz en fait ressortir encore un, qui permet d'effectuer une élimination, à savoir où les forces extérieures $P_1, P_2, \ldots, P_\rho$ sont continuellement nulles et où dans le potentiel cinétique les dérivées premières des coordonnées $p_1, p_2, \ldots, p_\rho$ ne se présentent au second degré que multipliées entr'elles; il montre que les équations du mouvement restantes prennent encore la forme de Lagrange et que le potentiel cinétique représente alors une fonction arbitrairement compliquée des dérivées des coordonnées restantes, et il nomme ce cas *le problème incomplet*.

Ensuite j'attaque le problème de l'élimination des coordonnées entre les équations du mouvement de Lagrange d'une manière tout à fait générale en considérant ma forme généralisée de ces équations, mais, pour simplifier l'exposition, je suppose encore que le potentiel cinétique renferme seulement les dérivées premières des coordonnées. Je trouve d'abord que *la condition nécessaire et suffisante pour que les équations du mouvement de Lagrange correspondant aux coordonnées* $p_1, \ldots, p_\rho$ *soient des dérivées exactes, prises par rapport au temps, de fonctions de toutes les coordonnées et des dérivées premières de celles-ci, ne renfermant pas les coordonnées* $p_1, \ldots, p_\rho$ *elles-mêmes, est que le potentiel cinétique ait la forme*

$$H = p_1'\varpi_1 + \ldots + p_\rho'\varpi_\rho + \mathfrak{p}_1'\int\left(\frac{\partial\varpi_1}{\partial\mathfrak{p}_1}dp_1 + \ldots + \frac{\partial\varpi_\rho}{\partial\mathfrak{p}_1}dp_\rho\right) + \ldots$$

$$+ \mathfrak{p}_\sigma'\int\left(\frac{\partial\varpi_1}{\partial\mathfrak{p}_\sigma}dp_1 + \ldots + \frac{\partial\varpi_\rho}{\partial\mathfrak{p}_\sigma}dp_\rho\right) + \Omega(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma, \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_\sigma', p_1', \ldots, p_\rho'),$$

où Ω *est une fonction quelconque des grandeurs dans la parenthèse et où* $\varpi_1, \ldots, \varpi_\rho$ *désignent des fonctions quelconques de* $p_1, \ldots, p_\rho, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma$, *qui ne sont soumises qu'à la seule condition*

$$\frac{\partial\varpi_{r_1}}{\partial p_{r_2}} = \frac{\partial\varpi_{r_2}}{\partial p_{r_1}}.$$

Alors les σ *équations du mouvement ultérieures, lorsque des* ρ *premières, qui prennent la forme*

$$\frac{\partial\Omega}{\partial p_1'} = h_1, \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial p_2'} = h_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial p_\rho'} = h_\rho,$$

l'on tire les grandeurs $p_1', p_2', \ldots, p_\rho'$ *comme fonctions de* $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma, \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_\sigma'$, *que l'on opère les substitutions, et que l'on pose*

$$\mathfrak{H} = (\Omega) - h_1(p_1') - h_2(p_2') + \ldots - h_\rho(p_\rho'),$$

se transforment de nouveau en la forme de Lagrange

$$-\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\mathfrak{p}_s} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\mathfrak{p}_s'} = \mathfrak{P}_s.$$

D'où ce résultat: *Dans le cas du potentiel cinétique dans la mécanique des*

masses pondérables le cas du mouvement caché considéré par Helmholtz, pour lequel le potentiel cinétique doit être indépendant de certaines des coordonnées, est le cas unique où les équations de Lagrange correspondantes se transforment en dérivées exactes prises par rapport au temps et où — ce qui est alors toujours le cas — on peut effectuer une élimination des coordonnées telle que les équations du mouvement résultantes prennent encore la forme de Lagrange.

D'une manière analogue j'étudie tous les cas, dans lesquels une série d'équations du mouvement d'un système, où les forces extérieures sont nulles, jouit de cette propriété que l'on peut éliminer les coordonnées et leurs dérivées, et, par conséquent, sont aussi résolus tous les cas du mouvement caché généralisé et les problèmes incomplets, où l'on fait l'hypothèse de potentiels cinétiques qui ne dépendent que des coordonnées et de leurs dérivées premières, et cela d'ailleurs d'une manière arbitraire.

Maintenant pour traiter sur un exemple de la mécanique des masses pondérables le cas où certaines des équations du mouvement de Lagrange se transforment en dérivées exactes prises par rapport au temps, j'étudie d'abord le mouvement de trois points matériels m_1, m_2, m_3, dont les coordonnées sont soumises à une équation de condition

$$z_1 = f(x_1, y_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3),$$

et dont les forces intérieures sont données par une fonction des forces

$$U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3).$$

J'obtiens ce théorème que: *la condition nécessaire et suffisante pour que, dans le mouvement de trois points matériels, dont les coordonnées sont soumises à une équation de condition, parmi les huit équations du mouvement il y en ait deux qui se transforment en dérivées exactes prises par rapport au temps, est que l'équation de condition ait la forme*

$$z_1 = ax_1 + by_1 + \omega,$$

où a et b sont des constantes et où ω *ne dépend que de* $x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$, *tandis que la fonction des forces a la forme*

$$U = (z_1 - ax_1 - by_1 - \omega) F_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3)$$
$$+ F(z_1 - ax_1 - by_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3);$$

dans ce cas, les six équations du mouvement pour les coordonnées $x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ *prennent encore la forme de Lagrange pour le potentiel cinétique donné par l'expression*

$$\mathfrak{H} = -\frac{m_1}{2(1+a^2+b^2)}\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + m_1 \frac{ac_1+bc_2}{1+a^2+b^2}\frac{d\omega}{dt} - \frac{3}{2} m_1 \frac{c_1^2(1+b^2) - 2abc_1c_2 + c_2^2(1+a^2)}{1+a^2+b^2}$$
$$- \frac{m_2}{2}(x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2) - \frac{m_3}{2}(x_3'^2 + y_3'^2 + z_3'^2) - F(\omega, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3).$$

Une application immédiate de ce théorème montre que:

Lorsque de trois points l'un est soumis par une liaison avec les deux autres à la condition que sa distance à un plan fixe reste toujours proportionnelle à la distance entre eux des deux autres points matériels, ces derniers s'attirant suivant la loi de Newton, le mouvement de ce point a lieu suivant la loi de Weber.

On obtient des théorèmes analogues dans le cas où il y a deux équations de condition entre les six coordonnées.

Après avoir résolu toutes ces questions, je me suis appliqué de nouveau à l'étude de la généralisation des principes mécaniques dans le cas du potentiel cinétique général, et, lorsque

$$\varphi = \int_{t_0}^{t} \left(H + \sum_1^n P_i p_i\right) dt$$

est défini comme fonction caractéristique, je trouve *pour généralisation de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre de Hamilton, l'équation*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_1^n p_i' \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} + \sum_1^n p_i'' \frac{\partial \varphi}{\partial p_i'} + \dots + \sum_1^n p_i^{(\nu-1)} \frac{\partial \varphi}{\partial p_i^{(\nu-2)}}$$
$$+ \sum_1^n \omega_i \left(t, p_1, \dots, p_n, \dots, p_1^{(\nu-1)}, \dots, p_n^{(\nu-1)}, \frac{\partial \varphi}{\partial p_1^{(\nu-1)}}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial p_n^{(\nu-1)}}\right)$$
$$= H(t, p_1, \dots, p_n, \dots, p_1^{(\nu-1)}, \dots, p_n^{(\nu-1)}, \omega_1, \dots, \omega_n) + \sum_1^n P_i p_i$$

à la variable dépendante φ *et aux* $\mu\nu + 1$ *variables indépendantes*

$$t, p_1, \ldots, p_\mu, p_1', \ldots, p_\mu', \ldots, p_1^{(\nu-1)}, \ldots, p_\mu^{(\nu-1)},$$

où les fonctions ω *sont définies par les valeurs*

$$p_s^{(\nu)} = \omega_s\left(t, p_1, \ldots, p_\mu, \ldots, p_1^{(\nu-1)}, \ldots, p_\mu^{(\nu-1)}, \frac{\partial\varphi}{\partial p_1^{(\nu-1)}}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial p_\mu^{(\nu-1)}}\right),$$

fournies par les équations

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_1^{(\nu-1)}} = \frac{\partial H}{\partial p_1^{(\nu)}}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial p_2^{(\nu-1)}} = \frac{\partial H}{\partial p_2^{(\nu)}}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial p_\mu^{(\nu-1)}} = \frac{\partial H}{\partial p_\mu^{(\nu)}}$$

Si l'on connait l'intégrale complète, renfermant $\mu\nu + 1$ constantes arbitraires, de l'équation aux dérivées partielles, constantes dont l'une est additive, tandis que l'on peut prendre pour les autres les valeurs

$$p_1^0, \ldots, p_\mu^0, p_1'^0, \ldots, p_\mu'^0, \ldots, p_1^{(\nu-1)0}, \ldots, p_\mu^{(\nu-1)0}$$

correspondant à la valeur initiale t_0, alors les $\mu\nu$ équations

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial p_s^0} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_s'}\right)_0 - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_s''}\right)_0 + \cdots + (-1)^{\nu-1}\left(\frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right)_0$$

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial p_s'^0} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_s''}\right)_0 - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_s'''}\right)_0 + \cdots + (-1)^{\nu-2}\left(\frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right)_0$$

$$- \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial p_s^{(\nu-1)0}} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right)_0,$$

où les grandeurs qui se présentent au second membre

$$p_1^{(\nu)0}, \ldots, p_\mu^{(\nu)0}, \ldots, p_1^{(2\nu-1)0}, \ldots, p_\mu^{(2\nu-1)0}$$

doivent être regardées comme de nouvelles constantes, fournissent les $\mu\nu$ grandeurs $p_s, p_s', \ldots, p_s^{(\nu-1)}$ comme fonctions de t et des $2\mu\nu$ constantes $p_s^0, p_s'^0, \ldots, p_s^{(2\nu-1)0}$, qui donnent l'intégration complète des μ équations de Lagrange généralisées d'ordre 2ν.

Mais le système complet d'équations différentielles de Hamilton trouve aussi une généralisation essentielle au moyen du théorème suivant:

Lorsque des équations

$$\frac{\partial H}{\partial p'_\rho} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p''_\rho} + \dots + (-1)^{\nu-1}\frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\frac{\partial H}{\partial p^{(\nu)}_\rho} = p_{\rho 2\nu-1},$$

$$\frac{\partial H}{\partial p''_\rho} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'''_\rho} + \dots + (-1)^{\nu-2}\frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}}\frac{\partial H}{\partial p^{(\nu)}_\rho} = p_{\rho 2\nu-2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (\text{pour } \rho = 1, 2, \dots, \mu)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p^{(\nu-1)}_\rho} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p^{(\nu)}_\rho} = p_{\rho\nu+1},$$

$$\frac{\partial H}{\partial p^{(\nu)}_\rho} = p_{\rho\nu},$$

dont les $\nu - 1$ premières sont respectivement linéaires en $p^{(2\nu-1)}_\rho$, $p^{(2\nu-2)}_\rho$, ..., $p^{(\nu+1)}_\rho$, l'on tire les $\mu\nu$ grandeurs $p^{(\nu)}_\rho$, $p^{(\nu+1)}_\rho$, ..., $p^{(2\nu-1)}_\rho$ exprimées au moyen de $p_\rho, p'_\rho, \dots, p^{(\nu-1)}_\rho, \dots, p_{\rho 2\nu-1}, p_{\rho 2\nu-2}, \dots, p_{\rho\nu}$ et qu'on les porte dans l'expression de l'énergie, que l'on désignera par (E), alors les équations du mouvement de Lagrange généralisées peuvent être remplacées par le système généralisé d'équations différentielles hamiltoniennes

$$\frac{dp_{s2\nu-1}}{dt} = \frac{\partial(E)}{\partial p_s}, \quad \frac{dp_{s2\nu-2}}{dt} = \frac{\partial(E)}{\partial p'_s}, \quad \dots, \quad \frac{dp_{s\nu}}{dt} = \frac{\partial(E)}{\partial p^{(\nu-1)}_s},$$

$$\frac{dp^{(\nu-1)}_s}{dt} = -\frac{\partial(E)}{\partial p_{s\nu}}, \quad \frac{dp^{(\nu-2)}_s}{dt} = -\frac{\partial(E)}{\partial p_{s\nu+1}}, \quad \dots, \quad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial(E)}{\partial p_{s2\nu-1}}.$$

Qu'il me soit permis, finalement, d'attirer l'attention sur le théorème suivant, provenant de mes recherches sur la nature des intégrales de ce système généralisé d'équations différentielles de Hamilton.

Si le potentiel cinétique est une fonction algébrique du temps, des coordonnées et de leurs dérivées prises par rapport au temps jusqu'à l'ordre ν inclus, et si le système généralisé d'équations différentielles de Hamilton possède une fonction intégrale algébrique, celle-ci est elle-même ou bien une

fonction rationnelle du potentiel cinétique, du temps, des coordonnées et de leurs dérivées prises par rapport au temps jusqu'à l'ordre $2\nu - 1$ *inclus, ou bien c'est une fonction composée algébriquement de pareilles fonctions intégrales rationnelles.*

Mais j'ai déjà trop longuement profité de votre patience. — Je serais très heureux si l'une ou l'autre des remarques faites dans les précédentes communications pouvait vous intéresser. — Pour l'instant veuillez etc. etc.

Signé: *Leo Königsberger.*

SUR LES PRINCIPES DE LA MÉCANIQUE.

Extrait d'une seconde lettre adressée à l'éditeur

PAR

LEO KÖNIGSBERGER
à HEIDELBERG.

[Traduit par L. Laugel.]

Puisque vous attachez un certain intérêt à mes recherches sur la mécanique, je prends la liberté de vous communiquer encore les quelques résultats suivants, qui paraîtront prochainement dans les *Sitzungsberichte* de l'Académie de Berlin.

Si l'on nomme *potentiel* la fonction des forces correspondant à une force $f(r, r', r'', \ldots, r^{(2\nu)})$, qui dépend de la distance et de ses dérivées prises par rapport au temps jusqu'à l'ordre 2ν inclus — à supposer qu'une telle fonction existe — lorsque cette fonction des forces W, dépendant de r et des ν premières dérivées et définie par l'équation

$$f(r, r', r'', \ldots, r^{(2\nu)}) = \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial r'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial W}{\partial r''} - \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial W}{\partial r^{(\nu)}},$$

renferme comme terme le plus élevé une expression de la forme

$$r^{(\nu)\alpha_\nu} r^{(\nu-1)\alpha_{\nu-1}} \ldots r''^{\alpha_2} r'^{\alpha_1}\left(\frac{c}{r} + c_1\right) \quad \text{ou} \quad r^{(\nu)\alpha_\nu} r^{(\nu-1)\alpha_{\nu-1}} \ldots r''^{\alpha_2} r'^{\alpha_1}\left(\frac{c}{r^2} + c_1 r + c_2\right),$$

selon que la grandeur

$$\varepsilon_1 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \ldots + (-1)^{\nu-1}\alpha_\nu \pmod{2}$$

déterminée par les équations

$$\alpha_\nu = 2k_\nu + \varepsilon_\nu, \qquad \alpha_{\nu-1} - \varepsilon_\nu = 2k_{\nu-1} + \varepsilon_{\nu-1}, \quad \ldots, \quad \alpha_2 - \varepsilon_3 = 2k_2 + \varepsilon_2,$$
$$\alpha_1 - \varepsilon_2 = 2k_1 + \varepsilon_1,$$

où les grandeurs ε désignent les nombres 0 ou 1, a pour valeur 0 ou 1, alors l'équation de Laplace généralisée pour le potentiel général sera

$$\Delta_{00}\Delta_{10}^{\varepsilon_1}\Delta_{11}^{k_1}\Delta_{21}^{\varepsilon_2}\Delta_{22}^{k_2}\ldots\Delta_{\nu-1\,\nu-2}^{\varepsilon_{\nu-1}}\Delta_{\nu-1\,\nu-1}^{k_{\nu-1}}\Delta_{\nu\,\nu-1}^{\varepsilon_\nu}\Delta_{\nu\nu}^{k_\nu}W = 0$$

pour une masse quelconque et pour un point situé en dehors de celle-ci, où

$$\Delta_{\varkappa\lambda}^{\mu} V$$

désigne l'expression μ fois itérée

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^{(\varkappa)}\partial x^{(\lambda)}} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^{(\varkappa)}\partial y^{(\lambda)}} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^{(\varkappa)}\partial z^{(\lambda)}},$$

et l'on a par conséquent pour la loi de Weber

$$\Delta_{00}\Delta_{11} W = 0.$$

Ensuite pour obtenir pour des potentiels qui dépendent de la distance et de ses dérivées premières la loi de Poisson généralisée pour un point situé à l'intérieur de la masse, je développe le potentiel d'une sphère creuse dont les couches concentriques sont homogènes et de rayons R_0 et R_1, et je trouve dans l'hypothèse de la loi de Weber pour le potentiel d'un point situé à l'extérieur de la sphère ou à l'intérieur de l'espace creux, l désignant la distance au centre de la sphère, v la vitesse du point, l' la projection de v sur la direction l, et σ la densité

$$W_a = M\left(\frac{1}{l} + \frac{l'^2}{k^2 l}\right) - \frac{4\pi}{3k^2}\frac{3l'^2 - v^2}{l^3}\int_{R_0}^{R_1}\sigma\rho^4 d\rho$$

et

$$W_i = 4\pi\int_{R_0}^{R_1}\sigma\rho\, d\rho + \frac{4\pi}{3k^2}v^2\int_{R_0}^{R_1}\sigma\rho\, d\rho;$$

le potentiel pour un point situé dans l'espace creux est donc indépendant de la situation du point et de la direction de la vitesse et a la forme

$a + bv^2$, où a et b sont des constantes. Si le point est situé dans l'espace sphérique annullaire, l'on a

$$W_m = 4\pi\left(\frac{1}{l} + \frac{l'^2}{k^2 l}\right)\int_{R_0}^{l} \sigma\rho^2 d\rho - \frac{4\pi}{3k^2}\frac{3l'^2 - v^2}{l^2}\int_{R_0}^{l} \sigma\rho^4 d\rho$$

$$+ 4\pi\int_{l}^{R_1} \sigma\rho d\rho + \frac{4\pi}{3k^2}v^2\int_{l}^{R_1} \sigma\rho d\rho$$

et par conséquent pour une sphère complète homogène

$$W_m = 2\pi\sigma\left(R^2 - \frac{l^2}{3}\right) + \frac{8\pi\sigma}{15k^2}l^2 l'^2 + \frac{2\pi\sigma}{3k}R^2 v^2 - \frac{2\pi\sigma}{5k^2}l^2 v^2.$$

D'où l'on conclut après une courte recherche, que l'équation de Poisson généralisée dans l'hypothèse de la loi de Weber est

$$\Delta_{00}\Delta_{11} W = -\frac{8\pi}{k^2}\sigma,$$

où σ désigne la densité de la masse attirante au point considéré.

Le mouvement d'un point compris dans l'espace annullaire sphérique, dans l'hypothèse de la loi de Weber, conduit à des intégrales hyperelliptiques simples.

Heidelberg le 5 janvier 1898.

QUELQUES REMARQUES SUR LES FONCTIONS ENTIÈRES

PAR

JULIUS PETERSEN
À COPENHAGUE.

Soit $\varphi(z)$ une fonction uniforme, ne possédant aucun point essentiel à distance finie. Posons

$$\log \varphi(z) = \log R + \theta i, \tag{1}$$

R désignant le module et θ l'argument de la fonction; l'on a alors

$$\frac{\partial \log R}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial y}; \qquad \frac{\partial \log R}{\partial y} = -\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

ou

$$\frac{1}{R}\left(\frac{\partial R}{\partial r}\frac{x}{r} - \frac{\partial R}{\partial \theta}\frac{y}{r^2}\right) = \frac{\partial \theta}{\partial r}\frac{y}{r} + \frac{\partial \theta}{\partial \theta}\frac{x}{r^2},$$

$$\frac{1}{R}\left(\frac{\partial R}{\partial r}\frac{y}{r} + \frac{\partial R}{\partial \theta}\frac{x}{r^2}\right) = -\frac{\partial \theta}{\partial r}\frac{x}{r} + \frac{\partial \theta}{\partial \theta}\frac{y}{r^2},$$

formules d'où l'on tire

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = -\frac{1}{Rr}\frac{\partial R}{\partial \theta}; \qquad \frac{\partial \theta}{\partial \theta} = \frac{r}{R}\frac{\partial R}{\partial r}; \tag{2}$$

$$d\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \log R}{\partial \theta}dr + r\frac{\partial \log R}{\partial r}d\theta. \tag{3}$$

Si l'on intègre cette dernière expression, en prenant pour chemin d'intégration une courbe fermée, l'on obtient, comme l'on sait, pour résultat $2\pi n$, où n désigne le nombre des zéros diminué de celui des infinis, respectivement situés dans la partie du plan limitée par la courbe. Si la courbe est une circonférence ayant l'origine pour centre, on a $dr = 0$, et

$$n = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial \log R}{\partial r} r\,d\theta. \tag{4}$$

Cette formule a une intéressante analogie avec la formule de GAUSS, qui détermine la quantité d'électricité contenue dans une partie de l'espace limitée par une surface géometrique, savoir:

$$E = \frac{1}{4\pi}\int N d\phi$$

où $d\phi$ désigne l'élément de surface et N la force normale. Si nous concevons qu'en tout zéro et en tout infini soit concentrée une masse 1 repoussant et attirant respectivement avec une force inversement proportionnelle à la distance, l'on aura pour un zéro la force normale

$$\frac{1}{\rho}\cos\varphi,$$

ρ désignant la distance et φ l'angle (r, ρ). En multipliant par ds et en intégrant le long de la circonférence du cercle, l'on obtient pour

$$\int \frac{1}{\rho}\cos\varphi\, ds$$

la valeur 2π, lorsque le point est à l'intérieur du cercle, et la valeur zéro, lorsqu'il est à l'extérieur du cercle. L'on a ainsi

$$n = \frac{1}{2\pi}\int N d\vartheta$$

où N désigne la force normale totale ayant son origine en tous les zéros et infinis. Si l'on suppose que les zéros et infinis donnent naissance à un potentiel $\log R$, la force normale sera $\frac{\partial \log R}{\partial r}$ et nous retombons sur notre formule (4). Pour le cercle on peut mettre une courbe fermée quelconque.

De cette formule (4) l'on peut en déduire d'autres par voie d'intégration; pour plus de simplicité nous supposerons qu'il n'y a pas d'infinis, c'est à dire que notre fonction transcendante est entière. En multipliant par $\frac{dr}{r}$ et en intégrant de 0 à r il vient

$$(5) \qquad \int_0^r \frac{n\,dr}{r} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\frac{R}{R_0}\,d\theta,$$

où R_0 est la valeur de R au centre du cercle. Désignons maintenant par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les modules des zéros situés à l'intérieur du cercle du rayon r, rangés par ordre de grandeur. Pour $0 < r < \alpha_1$, on a $n = 0$; pour $\alpha_1 < r < \alpha_2$, on a $n = 1, \ldots$ etc., et alors

$$\int_0^r \frac{n\,dr}{r} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dr}{r} + 2\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \frac{dr}{r} + \ldots + n\int_{\alpha_n}^{r} \frac{dr}{r} = \log\frac{\alpha_2}{\alpha_1} + 2\log\frac{\alpha_3}{\alpha_2} + \ldots + n\log\frac{r}{\alpha_n},$$

d'où

$$\text{(6)} \qquad \log\frac{r^n}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\frac{R}{R_0}\,d\theta,$$

où le second membre détermine la valeur moyenne de $\log\frac{R}{R_0}$ sur le cercle. La formule nous montre que cette valeur est continue.[1]

Posons

$$\text{(7)} \qquad \frac{\log n}{\log \alpha_n} = \rho_n \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\alpha_n^{\rho_n}} = \frac{1}{n}.$$

Je supposerai encore que ρ_n a une limite ρ, ou, d'une manière plus précise que, ε désignant une grandeur positive qui peut devenir aussi petite que l'on veut, l'on peut toujours trouver une valeur de r telle que, pour cette valeur de r et toute valeur plus grande, on ait

$$\frac{1}{n^{1-\varepsilon}} > \frac{1}{\alpha_n^{\rho}} > \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}.$$

L'on reconnait que ρ est le nombre que M. BOREL appelle *l'ordre* de la fonction. La série

$$\sum \frac{1}{\alpha_n^{\rho}}$$

se trouvant sur la limite de convergence et divergence, le genre p de la fonction doit être le plus grand nombre entier contenu en ρ, si ρ est fractionnaire; si, au contraire, ρ est un nombre entier on aura $p = \rho - 1$ ou $p = \rho$. Dans les deux cas nous supposerons que le genre est déterminé par les facteurs primaires de la fonction.

[1] Monsieur JENSEN m'a informé qu'il a déjà démontré cette formule par une autre voie et en a fait l'objet d'une communication à la Société mathématique de Copenhague.

Désignons par $\overline{R}$ la plus grande valeur de R sur le cercle; de la formule (6) vient

$$\overline{R} > R_0 \frac{r^n}{a_1 a_2 \dots a_n}. \tag{8}$$

En définissant ρ comme précédemment l'on peut, pour r suffisamment grand, écrire

$$a_1 a_2 \dots a_n = (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n)^{\frac{1}{\rho}} = \left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{n}{\rho}}; \qquad n = r^\rho,$$

d'où

$$\overline{R} > e^{\frac{1}{\rho} r^\rho}$$

où le facteur fini $\frac{1}{\rho}$ peut être omis. Lorsqu'une fonction croît comme e^{r^μ}, où μ doit être pris avec une définition analogue à celle de ρ, μ représente alors le nombre que M. Borel nomme l'*ordre apparent* de la fonction. La formule trouvée montre qu'on a toujours

$$\mu \geqq \rho. \tag{9}$$

D'après les recherches de MM. Hadamard et Borel, on a $\mu = \rho$ quand le genre est déterminé par les facteurs primaires, ce qui est toujours le cas lorsque μ est fractionnaire. Je vais en donner une démonstration nouvelle pour le cas où $p = 0$ et conséquemment $\rho \overline{\overline{<}} 1$.

On a

$$\overline{R} < R_0 \left(1 + \frac{r}{a_1}\right)\left(1 + \frac{r}{a_2}\right) \dots . \tag{10}$$

Lorsque, dans le cercle de rayon r, il se présente n zéros, on a, pour $q > n$

$$1 + \frac{r}{a_q} \leqq 1 + \frac{r^{\rho+\varepsilon}}{a_q^{\rho+\varepsilon}},$$

où ε désigne une petite grandeur positive qui s'évanouit pour $\rho = 1$. D'après un théorème connu, pour des valeurs positives $b_1, b_2, \dots, b_m$, on a

$$\sqrt[m]{b_1 \cdot b_2 \dots b_m} < \frac{1}{m}(b_1 + b_2 + \dots + b_m);$$

par conséquent

$$\left(1+\frac{r}{a_{n+1}}\right)\left(1+\frac{r}{a_{n+2}}\right)\cdots\left(1+\frac{r}{a_{n+m}}\right)<\left(1+\frac{r^{\rho+\varepsilon}}{m}\sum_{n+1}^{n+m}\frac{1}{a_q^{\rho+\varepsilon}}\right)^m.$$

Si m croît indéfiniment, la somme au second membre aura une valeur finie que nous désignerons par k, et l'on a

$$\lim\left(1+\frac{kr^{\rho+\varepsilon}}{m}\right)^m=e^{kr^{\rho+\varepsilon}}.$$

Pour r suffisamment grand, on a

$$\left(1+\frac{r}{a_1}\right)\left(1+\frac{r}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{r}{a_n}\right)<\frac{(2r)^n}{a_1a_2\ldots a_n}<e^{r^{\rho+\varepsilon}},$$

et (10) donne

$$\overline{R}<e^{r^{\rho+\varepsilon}},$$

c'est à dire

$$\mu\leqq\rho,$$

et, par conséquent, en ayant égard à la formule (9) pour toute fonction de genre zéro

$$\mu=\rho.$$

Maintenant supposons que l'on ait $p>0$, et soient $1, \alpha, \beta$ les racines de l'équation $x^{p+1}=1$.

L'on a

$$\varphi(z)\varphi(\alpha z)\varphi(\beta z)\ldots=\left(1-\frac{z^{p+1}}{b_1^{p+1}}\right)\left(1-\frac{z^{p+1}}{b_2^{p+1}}\right)\ldots,$$

où $b_1, b_2, \ldots$ sont les zéros de $\varphi(z)$. Comme le produit est de genre zéro par rapport à z^{p+1}, on voit que pour la fonction

$$F(z)=\varphi(z)\varphi(\alpha z)\varphi(\beta z)\ldots$$

on a $\mu=\rho$. Ce dernier nombre est le même pour $F(z)$ et $\varphi(z)$, mais je n'ai pas réussi à démontrer directement que les deux fonctions ont même ordre apparent (le nombre μ), quand le genre de $\varphi(z)$ est déterminé par les facteurs primaires. Si p n'est pas déterminé par ces facteurs, le produit doit toujours croître moins rapidement que $\varphi(z)$.

Je donnerai maintenant une seconde application de la formule (4): D'après cette formule on a

$$\int_r^\infty \frac{n\,dr}{r^{\rho+1}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_r^\infty \frac{\partial \log R}{\partial r}\frac{dr}{r^\rho},$$

où l'on a écrit ρ au lieu de $\rho+\varepsilon$. L'on a ici

$$\int_r^\infty \frac{n\,dr}{r^{\rho+1}} = \frac{1}{\rho}\sum_{n+1}^\infty \frac{1}{a_q^\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{n}{r^\rho},$$

où la série au second membre est convergente pour ε aussi petit que l'on veut. D'autre part, en intégrant par parties l'on a

$$\int_r^\infty \frac{\partial \log R}{\partial r}\frac{dr}{r^\rho} = \left[\frac{\log R}{r^\rho}\right]_r^\infty + \rho\int_r^\infty \log R \frac{dr}{r^{\rho+1}}.$$

Si l'on suppose que $\mu = \rho$,

$$\frac{\log R}{r^\rho}$$

sera égal à zéro pour $r = \infty$, d'où

$$\sum_{n+1}^\infty \frac{1}{a_q^\rho} = -\frac{n}{r^\rho} - \frac{\rho}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\log R}{r^\rho}\,d\theta + \frac{\rho^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_r^\infty \frac{\log R}{r^{\rho+2}}\,r\,dr\,d\theta,$$

ce qui fait voir que la valeur moyenne de

$$\frac{\log R}{r^{\rho+2+\varepsilon}}$$

sur l'anneau circulaire infini, multipliée par la surface, est finie pour une valeur de $\varepsilon > 0$, si petite qu'elle soit, mais devient infini pour $\varepsilon = 0$.

ÜBER FUNDAMENTALSYSTEME FÜR SYMMETRISCHE FUNKTIONEN

VON

KARL THEODOR VAHLEN
in KÖNIGSBERG i. Pr.

I.

Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Wurzeln der Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

und $s_1, s_2, s_3, \ldots$ die natürlichen Potenzsummen derselben.

Dann ist die Entwicklung bekannt:

$$1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots = \prod_k (1 - x_k z) = e^{\sum_k \lg(1 - x_k z)} \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

gleich

$$e^{-s_1 z - s_2 \frac{z^2}{2} - s_3 \frac{z^3}{3} - \ldots} = 1 - s_1 z + \frac{-s_2 + s_1^2}{2} z^2 + \left(-\frac{s_3}{3} + \frac{s_1 s_2}{2} - \frac{s_1^3}{6}\right) z^3 + \ldots,$$

aus der durch Koëffizientenvergleichung folgt:

$$a_1 = -s_1,$$

$$a_2 = -\frac{s_2}{2} + \frac{s_1^2}{2},$$

$$a_3 = -\frac{s_3}{3} + \frac{s_1 s_2}{2} - \frac{s_1^3}{6}$$

u. s. w.

Da jede rationale symmetrische Funktion von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine rationale Funktion der $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist, so folgt dasselbe für $s_1, s_2, \ldots, s_n$ oder:

Die n ersten Potenzsummen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bilden ein Fundamentalsystem für symmetrische Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

II.

Wie die vorhergehende Entwicklung auf dem Additionstheorem der Exponentialfunktion, so beruht die folgende auf dem des hyperbolischen Tangens:

$$\operatorname{tgh}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\operatorname{tgh}\alpha_1 + \operatorname{tgh}\alpha_2}{1 + \operatorname{tgh}\alpha_1 . \operatorname{tgh}\alpha_2},$$

woraus allgemein:

$$\operatorname{tgh}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = \frac{\mathrm{S}\operatorname{tgh}\alpha_1 + \mathrm{S}\operatorname{tgh}\alpha_1 . \operatorname{tgh}\alpha_2 . \operatorname{tgh}\alpha_3 + \ldots}{1 + \mathrm{S}\operatorname{tgh}\alpha_1 . \operatorname{tgh}\alpha_2 + \ldots},$$

folgt; hier stehen im Zähler die combinatorischen Summen ungrader Ordnung, im Nenner diejenigen grader Ordnung.

Diesem Satz zufolge wird nämlich:

$$\frac{a_1 z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \ldots}{1 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \ldots} = -\operatorname{tgh}\sum_k \operatorname{arc\,tgh} x_k z \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

also gleich $-\operatorname{tgh}\left(s_1 z + s_3 \frac{z^3}{3} + s_5 \frac{z^5}{5} + \ldots\right)$. Daher muss diese scheinbar transscendente Funktion von z eine rationale Funktion n^{ter} Ordnung

$$\frac{a_1 z + a_3 z^3 + \ldots}{1 + a_2 z^2 + \ldots}$$

sein; woraus folgt, dass ihre Kettenbruchentwicklung:

$$-\operatorname{tgh}\left(s_1 z + s_3 \frac{z^3}{3} + s_5 \frac{z^5}{5} + \ldots\right) = \cfrac{c_0 z}{1 + \cfrac{c_1 z^2}{1 + \cfrac{c_2 z^2}{1 + \ldots}}}$$

spätestens mit $c_{n-1} z^2$ abbrechen muss.

Wir wollen zeigen, dass in diese Entwicklung nur die Potenzsummen $s_1, s_3, s_5, \ldots, s_{2n-1}$ eintreten.

Es ist nämlich:

$$1+\cfrac{c_n x}{1+\cfrac{c_{n+1}x}{1+\dots}} = 1 + x\mathfrak{P}(x),$$

wo unter $\mathfrak{P}(x)$ ganz allgemein eine Potenzreihe $a + bx + cx^2 + \dots$ zu verstehen ist. Demnach wird auch durch Division in $c_{n-1}x$:

$$1+\cfrac{c_{n-1}x}{1+\cfrac{c_n x}{1+\cfrac{c_{n+1}x}{1+\dots}}} = 1 + c_{n-1}x + x^2\mathfrak{P}(x),$$

wo natürlich $\mathfrak{P}(x)$ eine andere Potenzreihe bezeichnet. Durch Division in $c_{n-2}x$ folgt jetzt:

$$1+\cfrac{c_{n-2}x}{1+\cfrac{c_{n-1}x}{1+\cfrac{c_n x}{1+\dots}}} = 1+\frac{c_{n-2}x}{1+c_{n-1}x}+x^3\mathfrak{P}(x);$$

und durch Division in $c_{n-3}x$:

$$1+\cfrac{c_{n-3}x}{1+\cfrac{c_{n-2}x}{1+\cfrac{c_{n-1}x}{1+\cfrac{c_n x}{1+\dots}}}} = 1+\cfrac{c_{n-3}x}{1+\cfrac{c_{n-2}x}{1+c_{n-1}x}} + x^4\mathfrak{P}(x).$$

U. s. w., schliesslich

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{c_1x}{1+\cfrac{c_2x}{1+\cfrac{c_3x}{1+\ddots\,1+\cfrac{c_{n-1}x}{1+\cfrac{c_nx}{1+\dots}}}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{c_1x}{1+\cfrac{c_2x}{1+\cfrac{c_3x}{1+\ddots\,1+c_{n-1}x}}}} + x^n\mathfrak{P}(x).$$

Multiplicirt man mit $c_0 x$ und setzt $x = z^2$, so kommt:

$$\cfrac{c_0 z}{1 + \cfrac{c_1 z^2}{1 + \cfrac{c_2 z^2}{1 + \ddots}}} = \cfrac{c_0 z}{1 + \cfrac{c_1 z^2}{1 + \cfrac{c_2 z^2}{1 + \ddots \cfrac{}{1 + c_{n-1} z^2}}}} + z^{2n+1}\mathfrak{P}(z^2),$$

woraus hervorgeht, dass man die Entwicklung von

$$\operatorname{tgh}\left(s_1 z + s_3 \frac{z^3}{3} + s_5 \frac{z^5}{5} + \dots\right)$$

nach Potenzen von z nur bis z^{2n-1} zu verwenden braucht, so dass in den $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ nur die Potenzsummen $s_1, s_3, \dots, s_{2n-1}$ vorkommen.

Verwandelt man den Kettenbruch:

$$\cfrac{c_0 z}{1 + \cfrac{c_1 z^2}{1 + \ddots \cfrac{}{1 + c_{n-1} z^2}}}$$

in einen gewöhnlichen und vergleicht ihn mit $\dfrac{a_1 z + a_3 z^3 + \dots}{1 + a_2 z^2 + \dots}$, so ergeben sich die $a_1, a_2, \dots, a_n$ als rationale Funktionen von $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$, also auch als rationale Funktionen von $s_1, s_3, \dots, s_{2n-1}$. Daher der Borchardt'sche Satz: [1]

Die n ersten Potenzsummen mit ungradem Index bilden ein Fundamentalsystem für symmetrische Funktionen.

Wir suchen die explicite Darstellung der $a_1, a_2, \dots, a_n$ durch die $s_1, s_3, \dots, s_{2n-1}$.

Die Entwicklung von

$$\cfrac{c_0 z}{1 + \cfrac{c_1 z^2}{1 + \ddots \cfrac{}{1 + c_k z^2}}}$$

[1] C. W. Borchardt, *Über eine Eigenschaft der Potenzsummen ungrader Ordnung.* Monatsberichte der Berliner Akademie, Juni 1857, p. 301. Gesammelte Werke, herausgegeben von G. Hettner, p. 107—118.

in eine Potenzreihe hat die Form:

$$c_0 z - c_0 c_1 z^3 + (c_0 c_1 c_2 + c_0 c_1^2) z^5 + \dots (-1)^k (c_0 c_1 \dots c_k + g_k(c_0, c_1, \dots, c_{k-1})) z^{2k+1}$$
$$+ g_{k+1}(c_0, c_1, \dots, c_k) z^{2k+3} + \dots .$$

wo unter g_k, g_{k+1} ganze rationale Funktionen verstanden sind. Man beweist dies durch den Schluss von k auf $k+1$, indem man

$$\frac{c_k}{1 + c_{k+1} z^2} = c_k - c_k c_{k+1} z^2 + \dots$$

für c_k einsetzt. Durch Vergleichung mit

$$-\operatorname{tgh}\left(s_1 z + s_3 \frac{z^3}{3} + s_5 \frac{z^5}{5} + \dots\right) = S_1 z + S_3 z^3 + S_5 z^5 + \dots,$$

wo S_{2k+1} rational und ganz von $s_1, s_3, \dots, s_{2k+1}$ und von s_{2k+1} nur linear abhängt, ergiebt sich c_k als rationale Funktionen von $s_1, s_3, \dots, s_{2k+1}$, deren Zähler s_{2k+1} nur linear, deren Nenner s_{2k+1} gar nicht und s_{2k-1} nur linear enthält.

Die Rechnung ergiebt z. B.:

$$c_0 = -s_1,$$

$$c_1 = \frac{1}{3} \frac{s_1^2 - s_3}{s_1},$$

$$c_2 = \frac{1}{15} \frac{s_1^6 - 5 s_1^3 s_3 + 9 s_1 s_5 - 5 s_3^2}{s_1 (s_1^3 - s_3)}.$$

Die Verwandlung von:

$$\cfrac{c_0 z}{1 + \cfrac{c_1 z^2}{1 + \cfrac{c_2 z^2}{1 + \ddots \cfrac{}{1 + c_{n-1} z^2}}}} \quad \text{in} \quad \frac{a_1 z + a_3 z^3 + \dots}{1 + a_2 z^2 + \dots}$$

ergiebt:

$$\begin{aligned}
a_1 &= c_0, \\
a_2 &= \mathsf{S}\, c_k, && (k=1,2,\ldots,n-1) \\
a_3 &= \mathsf{S}\, c_0 c_k, && (k=2,3,\ldots,n-1) \\
a_4 &= \mathsf{S}\, c_h c_k, && \left(\begin{smallmatrix} h,k=1,2,\ldots,n-1 \\ h<k-1 \end{smallmatrix}\right) \\
a_5 &= c_0 \mathsf{S}\, c_h c_k, && \left(\begin{smallmatrix} h,k=2,3,\ldots,n-1 \\ h<k-1 \end{smallmatrix}\right) \\
&\cdots\cdots \\
a_n &= c_{n-1} c_{n-3} c_{n-5} \ldots.
\end{aligned}$$

Hier sind unter den S combinatorische Summen mit Ausschluss der Sequenzen $c_1 c_2, c_2 c_3, \ldots, c_{n-2} c_{n-1}$ zu verstehen.

Daraus folgt im Besonderen, dass a_n eine rationale Funktion von $s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1}$ ist, welche s_{2n-1} nur im Zähler und dort linear, und s_{2n-3} im Nenner linear enthält.

Wenn die Kettenbruchentwicklung von $\operatorname{tgh}\left(s_1 z + s_3 \frac{z^3}{3} + \ldots\right)$ wirklich erst mit c_{n-1} abbricht, so sind die $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vollkommen bestimmte Funktionen von $s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1}$, d. h. das System:

$$\begin{aligned}
x_1 + \ldots + x_n \quad &= s_1, \\
x_1^3 + \ldots + x_n^3 \quad &= s_3, \\
\cdots\cdots\cdots \\
x_1^{2n-1} + \ldots + x_n^{2n-1} &= s_{2n-1}
\end{aligned}$$

ist eindeutig, durch ein Wurzelsystem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lösbar. Jede symmetrische Funktion der $x_1, x_2, \ldots, x_n$, z. B. auch s_{2n+1} wird rationale Funktion von $s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1}$, also:

$$s_{2n+1} = \frac{Q_n(s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1})}{P_n(s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1})},$$

wo P_n und Q_n ganze rationale teilerfremde Funktionen von $s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1}$ sind. Wir wollen die irreduktible ganze Funktion:

$$s_{2n+1} P_n(s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1}) - Q_n(s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1})$$

von $s_1, s_3, \ldots, s_{2n+1}$ mit:

$$R_{n+1}(s_1, s_3, \ldots, s_{2n+1})$$

bezeichnen.

Dann folgt also aus dem Bestehen der $n + 1$ Gleichungen:

$$x_1 + \ldots + x_n = s_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1^{2n+1} + \ldots + x_n^{2n+1} = s_{2n+1}$$

die Gleichung:

$$R_{n+1}(s_1, s_3, \ldots, s_{2n+1}) = 0.$$

Bricht aber der Kettenbruch schon mit $c_{n-k-1}z^2$ ab, so ist

$$\cfrac{c_0 z}{1 + \cfrac{c_1 z^2}{1 + \ddots \, 1 + c_{n-k-1} z^2}} = \frac{a_1' z + a_3' z^3 + \ldots}{1 + a_2' z^2 + \ldots}$$

eine gebrochene Funktion $n - k^{\text{ten}}$ Grades, also

$$\cfrac{c_0 z}{1 + \cfrac{c_1 z^2}{1 + \ddots \, 1 + c_{n-k-1} z^2}} = -1$$

eine Gleichung $n - k^{\text{ten}}$ Grades. Um dieselbe in eine Gleichung n^{ten} Grades zu verwandeln, erweitere man

$$\frac{a_1' z + a_3' z^3 + \ldots}{1 + a_2' z^2 + \ldots}$$

mit dem unbestimmten Faktor:

$$1 + \alpha_1 z^2 + \alpha_2 z^4 + \ldots + \alpha_{\left[\frac{k}{2}\right]} z^{2\left[\frac{k}{2}\right]}$$

und füge für ungrades k noch das Glied $a_n z^n$ mit $a_n = 0$ hinzu. Nunmehr ergeben sich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ als rationale Funktionen von $s_1, s_3, \ldots,$

s_{2n-1} und den $\left[\frac{k}{2}\right]$ unbestimmten Grössen $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\left[\frac{k}{2}\right]}$. Bezeichnet man die n Wurzeln der Gleichung:

$$(a'_1 z + a'_3 z^3 + \ldots)\left(1 + \alpha_1 z^2 + \ldots + \alpha_{\left[\frac{k}{2}\right]} z^{2\left[\frac{k}{2}\right]}\right)$$

$$+ (1 + a'_2 z^2 + \ldots)\left(1 + \alpha_1 z^2 + \ldots + \alpha_{\left[\frac{k}{2}\right]} z^{2\left[\frac{k}{2}\right]}\right) = 0$$

mit $\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n}$, so genügen also $x_1, x_2, \ldots, x_n$ den Gleichungen:

$$x_1 + \ldots + x_n = s_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1^{2n-1} + \ldots + x_n^{2n-1} = s_{2n-1};$$

es sind aber $\left[\frac{k}{2}\right]$ Paare conträrgleicher Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_{2\left[\frac{k}{2}\right]}$, vorhanden, Wurzeln von:

$$x^{2\left[\frac{k}{2}\right]} + \ldots + \alpha_{\left[\frac{k}{2}\right]} = 0,$$

und $k - 2\left[\frac{k}{2}\right]$ Wurzeln Null, nämlich eine, x_k, oder keine. Daher bestehen die Gleichungen:

$$x_{k+1} + \ldots + x_n = s_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{k+1}^{2n-1} + \ldots + x_n^{2n-1} = s_{2n-1},$$

und es ist:

$$R_{n-k+1}(s_1, s_3, \ldots, s_{2(n-k)+1}) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$R_n(s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1}) = 0.$$

Für den Fall der Unbestimmtheit ist mindestens $k = 2$, also mindestens:

$$R_n(s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1}) = 0 \quad \text{und} \quad R_{n-1}(s_1, s_3, \ldots, s_{2n-3}) = 0.$$

Umgekehrt: ist jetzt

$$R_{n-2}(s_1, s_3, \ldots, s_{2n-5}) \neq 0$$

so ist das System:

$$\begin{aligned} x_3 + \ldots + x_n &= s_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_3^{2n-5} + \ldots + x_n^{2n-5} &= s_{2n-5} \end{aligned}$$

bestimmt eindeutig lösbar. Ist nun

$$R_{n-1}(s_1, s_3, \ldots, s_{2n-3}) = 0$$

und setzt man

$$x_3^{2n-3} + \ldots + x_n^{2n-3} = s'_{2n-3}$$

so ist auch $R_{n-1}(s_1, s_3, \ldots, s'_{2n-3}) = 0$; also, wegen der Linearität der beiden Gleichungen in s'_{2n-3} und s_{2n-3}

$$s'_{2n-3} = s_{2n-3}.$$

Die Gleichung $R_{n-1}(s_1, s_3, \ldots, s_{2n-3}) = 0$ kann nämlich nicht identisch für jedes s_{2n-3} erfüllt sein, da sonst der Fall der Unbestimmtheit für das System

$$\begin{aligned} x_3 + \ldots + x_n &= s_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_3^{2n-5} + \ldots + x_n^{2n-5} &= s_{2n-5} \end{aligned}$$

eintreten, also

$$R_{n-2}(s_1, s_3, \ldots, s_{2n-5}) = 0$$

sein müsste.

Demnach ist auch die Gleichung:

$$x_3^{2n-3} + \ldots + x_n^{2n-3} = s_{2n-3}$$

erfüllt. Ist ferner:

$$R_n(s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1}) = 0$$

so beweist man ebenso, dass auch die Gleichung

$$x_3^{2n-1} + \ldots + x_n^{2n-1} = s_{2n-1}$$

erfüllt ist, so dass bei beliebigem $x_1 = -x_2$ das Gleichungssystem besteht:

$$x_1 + \dots + x_n \quad = s_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$x_1^{2n-1} + \dots + x_n^{2n-1} = s_{2n-1}.$$

Also: Der Fall der Unbestimmtheit tritt dann und nur dann ein, wenn

$$R_n(s_1, s_3, \dots, s_{2n-1}) = 0$$

und

$$R_{n-1}(s_1, s_2, \dots, s_{2n-3}) = 0$$

sind.

Wir wollen der späteren Anwendungen wegen noch das Corollar aussprechen:

Wenn $R_n(s_1, \dots, s_{2n-1}) = 0$ ist, so tritt der Fall der Unbestimmtheit dann und nur dann ein, wenn noch $R_{n-1}(s_1, s_3, \dots, s_{2n-3}) = 0$ ist.

Es werde jetzt der ordinäre Fall

$$R_n(s_1, s_3, \dots, s_{2n-1}) \neq 0$$

betrachtet. Aus den Gleichungen:

$$x_1 + \dots + x_{k-1} + x_{k+1} + \dots + x_n \quad = s_1 \quad - x_k,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_1^{2n-1} + \dots + x_{k-1}^{2n-1} + x_{k+1}^{2n-1} + \dots + x_n^{2n-1} = s_{2n-1} - x_k^{2n-1}$$

folgt:

$$R_n(s_1 - x_k, s_3 - x_k^3, \dots, s_{2n-1} - x_k^{2n-1}) = 0 \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

d. h. die Gleichung

$$R_n(s_1 - x, s_3 - x^3, \dots, s_{2n-1} - x^{2n-1}) = 0$$

hat die n Wurzeln $x_1, x_2, \dots, x_n$. Sie hat keine weitere Wurzel; denn wäre etwa ξ_n eine solche, und $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$ die zugehörige Lösung des Systems:

$$\xi_1 + \dots + \xi_{n-1} = s_1 \quad - \xi_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\xi_1^{2n-1} + \dots + \xi_{n-1}^{2n-1} = s_{2n-1} - \xi_n^{2n-1},$$

so wäre das Systems:

$$x_1 + \dots + x_n \quad = s_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$x_1^{2n-1} + \dots + x_n^{2n-1} = s_{2n-1}$$

auf mehr als eine Art lösbar, was der Voraussetzung $R_n(s_1, s_3, \dots, s_{2n-1}) \neq 0$ wiederspricht. Da ferner die Koëffizienten der Gleichung

$$R_n(s_1 - x, \dots, s_{2n-1} - x^{2n-1}) = 0$$

ganze rationale Funktionen von $a_1, a_2, \dots, a_n$ sind, so kann die linke Seite derselben abgesehen von einem Faktor nur eine Potenz der Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

sein.

Diese Potenz kann nur die erste sein, weil $R_n(s_1, s_3, \dots, s_{2n-1})$ ebenso wie der Zähler von a_n die Grösse s_{2n-1} nur linear enthalten. Setzt man:

$$R_n(s_1 - x, \dots, s_{2n-1} - x^{2n-1}) = R_n(s_1, \dots, s_{2n-1}) + xR_n^{(1)}(s_1, \dots, s_{2n-1}) + \dots + x^n R_n^{(n)}(s_1, \dots, s_{2n-1})$$

so ist also:

$$a_n = \frac{R_n(s_1, \dots, s_{2n-1})}{R_n^{(n)}(s_1, \dots, s_{2n-1})},$$

$$a_{n-1} = \frac{R_n^{(1)}(s_1, \dots, s_{2n-1})}{R_n^{(n)}(s_1, \dots, s_{2n-1})}$$

u. s. w.

Wir bewiesen früher, dass der Nenner von a_n unabhängig von s_{2n-1} und in s_{2n-3} linear ist. Nehmen wir jetzt $R_n(s_1, \dots, s_{2n-1}) = 0$, so wird a_n unbestimmt dann und nur dann, wenn $R_n^{(n)}(s_1, \dots, s_{2n-3}) = 0$ ist. Durch Vergleichung mit dem entsprechenden früheren Resultate folgt nunmehr:

$$R_n^{(n)}(s_1, \dots, s_{2n-3}) = R_{n-1}(s_1, \dots, s_{2n-3})$$

bis auf einen Zahlenfaktor.

Demnach wird bis auf einen Zahlenfaktor:

$$a_n = \frac{R_n}{R_{n-1}}, \qquad a_{n-1} = \frac{R_n^{(1)}}{R_{n-1}} \quad \text{u. s. w.}$$

Durch Verbindung mit

$$a_n = c_{n-1} c_{n-3} c_{n-5} \ldots$$

folgt jetzt:

$$c_{n-1} c_{n-3} c_{n-5} \ldots = \frac{R_n}{R_{n-1}}.$$

Natürlich ist ebenso allgemein:

$$c_{k-1} c_{k-3} c_{k-5} \ldots = \frac{R_k}{R_{k-1}} \qquad (k=n, n-1, \ldots)$$

bis zu

$$c_3 c_1 = \frac{R_4}{R_3},$$

$$c_2 c_0 = \frac{R_3}{R_2},$$

$$c_1 = \frac{R_2}{R_1},$$

$$c_0 = \frac{R_1}{R_0},$$

wo $R_0 = 1$ zu setzen ist. Durch Division der Gleichungen:

$$c_{k-1} c_{k-3} c_{k-5} \ldots = \frac{R_k}{R_{k-1}},$$

$$c_{k-3} c_{k-5} \ldots = \frac{R_{k-2}}{R_{k-3}}$$

folgt:

$$c_{k-1} = \frac{R_k}{R_{k-1}} : \frac{R_{k-2}}{R_{k-3}}$$

bis auf einen Zahlenfaktor. Zu der Bestimmung desselben gehen wir nunmehr über. Ist p_n das Gewicht von R_n, so liefert $a_n R_{n-1} = R_n$ die Bestimmung:

$$p_n = n + p_{n-1} = n + (n-1) + p_{n-2} = \ldots = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Wir nehmen $R_n, R_{n-1}, \ldots$ mit solchen Zahlenfaktoren multiplizirt an, dass darin das höchste vorkommende Glied:

$$s_1^{\frac{n(n+1)}{2}}, \; s_1^{\frac{(n-1)n}{2}}, \ldots$$

den Koeffizienten $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}, (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}, \ldots$ besitzt. Dann sei

$$c_{k-1} = \lambda_{k-1} \frac{R_k}{R_{k-1}} : \frac{R_{k-2}}{R_{k-3}},$$

wo λ_{k-1} die zu bestimmenden Zahlenfaktoren sind. Also wird:

$$\frac{a_1 z + a_3 z^3 + \ldots}{1 + a_2 z^2 + \ldots} = \cfrac{\lambda_0 \frac{R_1}{R_0} z}{1 + \cfrac{\lambda_1 \frac{R_2}{R_1} z^2}{1 + \cfrac{\lambda_2 \frac{R_3}{R_2} : \frac{R_1}{R_0} z^2}{1 + \cfrac{\lambda_3 \frac{R_4}{R_3} : \frac{R_2}{R_1} z^2}{1 + \ddots \; 1 + \lambda_{n-1} \frac{R_n}{R_{n-1}} : \frac{R_{n-2}}{R_{n-3}} z^2.}}}}$$

Setzen wir jetzt:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = -\frac{1}{n}$$

und gehen zur Grenze $n = \infty$ über, so wird

$$a_1 = -x_1 - x_2 - \ldots - x_n = 1,$$

$$a_2 = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{|\underline{2}},$$

$$a_3 = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 . 8 . 3} \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{1}{|\underline{3}}$$

u. s. w.

und $s_1 = -1$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$, u. s. w., also

$$R_0 = 1, \quad R_1 = 1, \quad R_2 = 1, \quad \text{u. s. w.}$$

Die obige Entwicklung wird:

$$\frac{z + \frac{z^3}{\underline{|3}} + \frac{z^5}{\underline{|5}} + \dots}{1 + \frac{z^2}{\underline{|2}} + \frac{z^4}{\underline{|4}} + \dots} = \cfrac{\lambda_0 z}{1 + \cfrac{\lambda_1 z^2}{1 + \cfrac{\lambda_2 z^2}{1 + \cfrac{\lambda_3 z^2}{1 + \ddots}}}}$$

Vergleicht man dieselbe mit dem Lambertschen Kettenbruch:[1]

---

[1] Es sei gestattet bei dieser Gelegenheit eine Herleitung der Lambertschen Formel zu veröffentlichen, welche mir vor längerer Zeit mein hochverehrter Lehrer LEOPOLD KRONECKER brieflich mitteilte.

»Sei

$$R_n = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{z^{2k}}{1.2.3\dots 2k} \cdot \frac{1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)\dots(2k+2n+1)},$$

wo aber für $k = 0$, wie gewöhnlich, an Stelle von $1.2.3\dots 2k$ nur 1 zu nehmen ist, so ist offenbar:

I. $$R_{n-1} = (2n+1)R_n + z^2 R_{n+1} \text{ für } n = 1, 2, 3, \dots \text{ in inf.}$$

und für $n = 0$ wird: $(2n+1)R_n + z^2 R_{n+1} = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$. Bezeichnet man dies mit R_{-1} so gilt also die Reductionsformel I auch für $n = 0$.

Deren successive Anwendung ergiebt:

$$\frac{R_{-1}}{R_0} = 1 + \frac{z^2}{\frac{R_0}{R_1}}, \quad \frac{R_0}{R_1} = 3 + \frac{z^2}{\frac{R_1}{R_2}}, \quad \frac{R_1}{R_2} = 5 + \frac{z^2}{\frac{R_2}{R_3}}, \dots$$

also in der That:

$$\frac{R_{-1}}{R_0} = 1 + \cfrac{z^2}{3 + \cfrac{z^2}{5 + \cfrac{z^2}{7 + \cfrac{z^2}{9 + \dots}}}}$$

und da $R_{-1} = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$, $R_0 = \frac{1}{2z}(e^z - e^{-z})$ ist, so resultirt die Lambertsche Formel:

$$\frac{z(e^z + e^{-z})}{e^z - e^{-z}} = 1 + \cfrac{z^2}{3 + \cfrac{z^2}{5 + \cfrac{z^2}{7 + \dots}}}$$

auf welche auch jener Leibnitzsche Ausspruch: numero Deus impari gaudet Anwendung

$$\frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \cfrac{z}{1 + \cfrac{\frac{z^2}{1\cdot 3}}{1 + \cfrac{\frac{z^2}{3\cdot 5}}{1 + \cfrac{\frac{z^2}{5\cdot 7}}{1 + \ldots}}}} = \cfrac{z}{1 + \cfrac{z^2}{3 + \cfrac{z^2}{5 + \cfrac{z^2}{7 + \ldots}}}}$$

so ergiebt sich:

$$\lambda_0 = 1, \qquad \lambda_1 = \frac{1}{1\cdot 3}, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{3\cdot 5}, \qquad \lambda_3 = \frac{1}{5\cdot 7}, \ldots$$

also:

$$\frac{a_1 z + a_3 z^3 + \ldots}{1 + a_2 z^2 + \ldots} = \cfrac{\frac{R_1}{R_0} z}{1 + \cfrac{\frac{R_2}{R_1} z^2}{3 + \cfrac{\frac{R_3}{R_2} : \frac{R_1}{R_0} z^2}{5 + \cfrac{\frac{R_4}{R_3} : \frac{R_2}{R_1} z^2}{7 + \ldots}}}}$$

Kürzt man diese Gleichung durch z und setzt $z^2 = x$, so erhält man die Entwicklung des Quotienten zweier beliebigen ganzen rationalen oder ganzen transscendenten Funktionen, und für $a_2 = a_4 = a_6 = \ldots = 0$ die Entwicklung einer beliebigen ganzen rationalen oder ganzen transscendenten Funktion in einen Kettenbruch.

Wir können der Kettenbruchentwicklung die Gestalt geben:

$$\frac{1 + a_2 z^2 + \ldots}{a_1 + a_3 z^2 + \ldots} = \frac{R_0}{R_1} + \cfrac{z^2}{3\frac{R_1^2}{R_0 R_2} + \cfrac{z^2}{5\frac{R_2^2}{R_1 R_3} + \ldots}};$$

---

findet, und welche namentlich dadurch merkwürdig ist, dass daraus unmittelbar die Irrationalität von $\frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$ für jeden rationalen Werth von z hervorgeht.

6. Aug. 87. KRONECKER.»

also dieselbe durch die Rekursionsformel:

$$f_{k-1}(z) = (2k - 1)\frac{R_{k-1}^2}{R_{k-2}R_k} f_k(z) + z^2 f_{k+1}(z) \qquad \binom{k=1,2,\ldots}{R_{-1}=0}$$

mit den Anfangsfunktionen:

$$f_0(z) = 1 + a_2 z^2 + \ldots,$$

$$f_1(z) = a_1 + a_3 z^2 + \ldots$$

darstellen. Für $z = 0$ folgt:

$$f_k(0) = \frac{1}{2k-1} \frac{R_{k-2}R_k}{R_{k-1}^2} f_{k-1}(0),$$

also wegen

$$f_0(0) = 1,$$

$$f_1(0) = \frac{R_1}{R_0},$$

$$f_2(0) = \frac{1}{1 . 3} \cdot \frac{R_2}{R_1},$$

u. s. w. allgemein

$$f_k(0) = \frac{1}{1 . 3 . 5 \ldots (2k-1)} \cdot \frac{R_k}{R_{k-1}}.$$

Umgekehrt sind hierdurch die Quotienten q_k in der Rekursionsformel:

$$f_{k-1}(z) = q_k f_k(z) + z^2 f_{k+1}(z)$$

und damit die Kettenbruchentwicklung vollkommen bestimmt.

Mit Berücksichtigung der Zahlenfaktoren wird jetzt:

$$c_k = \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \cdot \frac{R_{k+1}}{R_k} : \frac{R_{k-1}}{R_{k-2}}$$

und

$$a_n = \frac{1}{1 . 3 . 5 \ldots (2n-1)} \cdot \frac{R_n}{R_{n-1}}, \qquad a_{n-1} = \frac{1}{1 . 3 \ldots (2n-1)} \cdot \frac{R_n^{(1)}}{R_{n-1}}, \text{ u. s. w.}$$

Nun ist s_{2n+1} eine ganze Funktion von $a_1, a_2, \ldots, a_n$ also wird s_{2n-1}

eine rationale Funktion von $s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1}$, deren Nenner eine Potenz von R_{n-1} ist. Mithin:

$$\mu_{n+1} R_{n+1} = s_{2n+1} R_{n-1}^{\gamma_{n-1}} - Q_n$$

wo μ_{n+1} ein Zahlenfaktor ist. Nun wird:

$$\gamma_{n-1} p_{n-1} + 2n + 1 = p_{n+1}$$

woraus

$$\gamma_{n-1} = 1$$

also

$$\mu_{n+1} R_{n+1} = s_{2n+1} R_{n-1} - Q_n$$

folgt.

Die Funktionen R_n haben noch eine andere einfache Bedeutung.

Setzen wir in $R_n(s_1, \ldots, s_{2n-1})$ und $R_{n-1}(s_1, \ldots, s_{2n-3})$ für $s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1}$ ihre Ausdrücke als ganze Funktionen von $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ein, so erhalten wir zwei ganze Funktionen von $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die wir mit $R'_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $R'_{n-1}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ bezeichnen wollen und zwischen denen die Relation besteht:

$$\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)} R'_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_n R'_{n-1}(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Geben wir also $a_1, \ldots, a_n$ solche endlichen Werte, dass

$$R'_{n-1}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0,$$

also die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_3 + \ldots + x_n &= s_1, \\ \ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots \\ x_3^{2n-1} + \ldots + x_n^{2n-1} &= s_{2n-1} \end{aligned}$$

erfüllbar, d. h. ein Wurzelpaar x_1, x_2 mit conträrgleichen Werten vorhanden; es verschwindet daher die Geminante:

$$\Pi(x_h + x_k) = G_n(a_1, a_2, \ldots, a_n). \qquad \left(\substack{h<k \\ h,k=1,2,\ldots,n}\right)$$

Umgekehrt, wenn $G_n = 0$ ist, so ist ein Wurzelpaar mit verschwindender Summe vorhanden, also die Gleichungen:

$$x_3 + \dots + x_n \quad = s_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$x_3^{2n-3} + \dots + x_n^{2n-3} = s_{2n-3}$$

erfüllbar, also

$$R_{n-1}(s_1, s_3, \dots, s_{2n-3}) = 0.$$

Daraus folgt, dass

$$k_n G_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = R_{n-1}^{\alpha}(s_1, \dots, s_{2n-3})$$

ist, wo k_n ein Zahlenfaktor und der Exponent α wegen der Gewichtsgleichheit der beiden Funktionen gleich Eins ist.

Um den Zahlenfaktor zu bestimmen, setzen wir in

$$k_{n+1} G_{n+1} = R_n$$

$x_{n+1} = 0$, also

$$G_{n+1} = G_n . x_1 x_2 \dots x_n$$

und für $x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n a_n$ seinen Wert $\frac{(-1)^n}{1.3.5\dots(2n-1)} \frac{R_n}{R_{n-1}}$ ein, so kommt:

$$\frac{(-1)^n k_{n+1}}{1.3.5\dots(2n-1)} \frac{R_n}{R_{n-1}} G_n = R_n.$$

Dividirt man durch: $k_n G_n = R_{n-1}$ so folgt:

$$(-1)^n k_{n+1} = 1.3\dots(2n-1) k_n,$$

also

$$k_{n+1} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (2n-1)(2n-3)^2(2n-5)^3 \dots 3^{n-1} 1^n,$$

$$\prod_h \{2n - (2h+1)\}^h G_n(a_1, \dots, a_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} R_{n-1}(s_1, s_3, \dots, s_{2n-3}).$$

Beachtenswert ist, dass die Geminante von s_{2n-1} unabhängig und von $s_1, s_3, \dots, s_{2n-3}$ eine ganze, wenn auch nicht ganzzahlige Funktion ist

III.

Die Entwicklungen in I. und II. sind die beiden ersten Fälle allgemeinerer Entwicklungen, zu denen wir jetzt übergehen.

Wir bezeichnen mit ν eine beliebige ganze Zahl und definiren $\nu - 1$ dem arctg analoge Funktionen durch die Gleichungen:

$$\varphi_1(z) = z + \frac{z^{\nu+1}}{\nu+1} + \frac{z^{2\nu+1}}{2\nu+1} + \cdots$$

$$\varphi_2(z) = \frac{z^2}{2} + \frac{z^{\nu+2}}{\nu+2} + \frac{z^{2\nu+2}}{2\nu+2} + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_{\nu-1}(z) = \frac{z^{\nu-1}}{\nu-1} + \frac{z^{2\nu-1}}{2\nu-1} + \frac{z^{3\nu-1}}{3\nu-1} + \cdots.$$

Für diese Funktionen ist offenbar:

$$\varepsilon\varphi_1(z) + \varepsilon^2\varphi_2(z) + \cdots + \varepsilon^{\nu-1}\varphi_{\nu-1}(z) = -\lg\frac{1-\varepsilon z}{\sqrt[\nu]{1-z^\nu}},$$

wenn ε, wie auch im Folgenden jede beliebige ν^{te} Einheitswurzel bedeutet.

Wir definiren ferner ν dem Sinus und Cosinus analoge Funktionen von $\nu - 1$ Variablen durch die Gleichung:

$$e^{-\varepsilon u_1 - \varepsilon^2 u_2 - \cdots - \varepsilon^{\nu-1} u_{\nu-1}}$$

$$= F_0(u_1, u_2, \ldots, u_{\nu-1}) + \varepsilon F_1(u_1, u_2, \ldots, u_{\nu-1}) + \cdots + \varepsilon^{\nu-1} F_{\nu-1}(u_1, u_2, \ldots, u_{\nu-1}).$$

Setzt man hierin:

$$u_1 = \sum_{k=1}^{n} \varphi_1(x_k z) = s_1 z + s_{\nu+1}\frac{z^{\nu+1}}{\nu+1} + s_{2\nu+1}\frac{z^{2\nu+1}}{2\nu+1} + \cdots$$

$$u_2 = \sum_{k=1}^{n} \varphi_2(x_k z) = s_2\frac{z^2}{2} + s_{\nu+2}\frac{z^{\nu+2}}{\nu+2} + s_{2\nu+2}\frac{z^{2\nu+2}}{2\nu+2} + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{\nu-1} = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{\nu-1}(x_k z) = s_{\nu-1}\frac{z^{\nu-1}}{\nu-1} + s_{2\nu-1}\frac{z^{2\nu-1}}{2\nu-1} + s_{3\nu-1}\frac{z^{3\nu-1}}{3\nu-1} + \cdots$$

ein, so kommt links:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1 - \varepsilon x_k z}{\sqrt[\nu]{1 - x_k^\nu z^\nu}}$$

$$= \frac{(1 + a_\nu z^\nu + a_{2\nu} z^{2\nu} + \ldots) + \varepsilon (a_1 z + a_{\nu+1} z^{\nu+1} + \ldots) + \ldots + \varepsilon^{\nu-1} (a_{\nu-1} z^{\nu-1} + a_{2\nu-1} z^{2\nu-1} + \ldots)}{\prod_{k=1}^{n} \sqrt[\nu]{1 - x_k^\nu z^\nu}}$$

und rechts:

$$F_0(z) + \varepsilon F_1(z) + \ldots + \varepsilon^{\nu-1} F_{\nu-1}(z),$$

wenn man zur Abkürzung:

$$F_h\left(\sum_{k=1}^{n} \varphi_1(x_k z)\ ,\ \sum_{k=1}^{n} \varphi_2(x_k z), \ldots,\ \sum_{k=1}^{n} \varphi_{\nu-1}(x_k z)\right) = F_h(z)$$

für $h = 0, \ldots, \nu - 1$ setzt. Daraus folgt, dass die ν ganzen transcendenten Funktionen:

$$F_0(z)\,,\ F_1(z)\,, \ldots,\ F_{\nu-1}(z)$$

den ν ganzen rationalen Funktionen:

$$f_0(z) = 1 + a_\nu z^\nu + \ldots, \qquad f_1(z) = a_1 z + a_{\nu+1} z^{\nu+1} + \ldots, \qquad \ldots,$$
$$f_{\nu-1}(z) = a_{\nu-1} z^{\nu-1} + a_{2\nu-1} z^{2\nu-1} + \ldots$$

proportional sind.

Zur Ermittlung der rationalen Verhältnisse der ν transcendenten Funktionen $F_0(z), \ldots, F_{\nu-1}(z)$ wenden wir den verallgemeinerten Kettenbruchalgorithmus in einer etwas andern als der üblichen Form an.

Wir setzen allgemein:

$$\frac{F_h(z)}{z^h} = \Phi_h(z), \qquad \frac{\Phi_h(z)}{\Phi_h(0)} = \Psi_h(z) \qquad (h = 0, \ldots, \nu-1)$$

und bilden die Entwicklung:

$$\Psi_0(z) = \Psi_1(z) + c_{\nu-1} \Psi_\nu\ \ (z) z^\nu,$$
$$\Psi_1(z) = \Psi_2(z) + c_\nu\ \ \Psi_{\nu+1}(z) z^\nu,$$

u. s. w., wo die Koëffizienten $c_{\nu-1}, c_\nu, \ldots$ so gewählt werden, dass stets

$\Psi_k(0) = 1$ ist, für jeden Index k. Diese Entwicklung bricht spätestens mit der Gleichung ab:

$$\Psi_{n-\nu}(z) = \Psi_{n-\nu+1}(z) + c_{n-1}\Psi_n(z)z^\nu,$$

indem nämlich $\Psi_{n-\nu+1}(z) = \Psi_{n-\nu+2} = \ldots = \Psi_n(z)$ der grösste gemeinsame Teiler der Funktionen $\Psi_0(z), \Psi_2(z), \ldots, \Psi_{\nu-1}(z)$ wird. In der That werden dann, $n = m\nu + r$ $(r < \nu - 1)$ gesetzt, $\Psi_0(z), \Psi_1(z), \ldots, \Psi_r(z)$ ganzen rationalen Funktionen vom Grade m in z^ν, und $\Psi_{r+1}(z), \Psi_{r+2}(z), \ldots, \Psi_{\nu-1}(z)$ ganzen rationalen Funktionen vom Grade $m - 1$ in z^ν proportional; wie es ja sein muss.

Wir bezeichnen mit

$$S_h^{(\nu)}(c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

die Summe aller derartigen Produkte von je h der Elemente $c_1, c_2, \ldots, c_n$, in denen keine zwei der h Indices um weniger als ν von einander differiren; z. B.

$$S_2^{(3)}(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = c_1c_4 + c_2c_5.$$

Dann erhält man aus dem Gleichungssysteme:

$$\Psi_{k-1}(z) = \Psi_k(z) + c_{k+\nu-2}\Psi_{k+\nu-1}(z)z^\nu \qquad (k=1,2,\ldots,n-\nu+1)$$

die laufende Proportion:

$$\begin{aligned} &\Psi_0(z) : \Psi_1(z) : \Psi_2(z) : \ldots : \Psi_{\nu-1}(z) \\ = {}&1 + S_1^{(\nu)}(c_{\nu-1}, c_\nu, \ldots, c_{n-1})z^\nu + S_2^{(\nu)}(c_{\nu-1}, \ldots, c_{n-1})z^{2\nu} + \ldots \\ : {}&1 + S_1^{(\nu)}(c_\nu, c_{\nu+1}, \ldots, c_{n-1})z^\nu + S_2^{(\nu)}(c_\nu, \ldots, c_{n-1})z^{2\nu} + \ldots \\ : {}&1 + S_1^{(\nu)}(c_{\nu+1}, c_{\nu+2}, \ldots, c_{n-1})z^\nu + S_2^{(\nu)}(c_{\nu+1}, \ldots, c_{n-1})z^{2\nu} + \ldots \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ : {}&1 + S_1^{(\nu)}(c_{2\nu-2}, c_{2\nu-1}, \ldots, c_{n-1})z^\nu + S_2^{(\nu)}(c_{2\nu-2}, \ldots, c_{n-1})z^{2\nu} + \ldots, \end{aligned}$$

wo die Grössen

$$S_h^{(\nu)}(c_k, \ldots, c_{n-1})$$

für $h > n - k$ gleich Null zu setzen sind. Setzt man noch:

$$\begin{aligned} c_0 &= a_1, \\ c_1 &= a_2, \\ &\ldots\ldots \\ c_{\nu-2} &= a_{\nu-1}, \end{aligned}$$

so ergiebt sich also:

$$\mathfrak{S}_1^{(\nu)}(c_{\nu-1}, \ldots, c_{n-1}) = a_\nu,$$

$$c_0 \mathfrak{S}_1^{(\nu)}(c_\nu, \ldots, c_{n-1}) = a_{\nu+1},$$

$$c_1 \mathfrak{S}_1^{(\nu)}(c_{\nu+1}, \ldots, c_{n-1}) = a_{\nu+2},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

u. s. w. bis zu

$$c_{n-1} c_{n-\nu-1} c_{n-2\nu-1} c_{n-3\nu-1} \ldots = a_n.$$

Wir wollen die natürliche Zahlenreihe nach Entfernung der Vielfachen von ν bezeichnen mit $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$, so dass

$$\nu_1 = 1, \quad \nu_2 = 2, \quad \nu_3 = 3, \ \ldots, \ \nu_{\nu-1} = \nu - 1, \quad \nu_\nu = \nu + 1, \quad \nu_{\nu+1} = \nu + 2, \ \ldots.$$

Ferner wollen wir jede ganze rationale Funktion von $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, \ldots, s_{\nu_h}$, die linear in s_{ν_h} ist, kurz mit $\{\nu_h\}$ bezeichnen. Dann ist z. B.

$$a_h = \{h\} \qquad \text{für } h = 1, 2, \ldots, \nu - 1.$$

Dann werden offenbar:

$$\Psi_0(z) = F_0(z) = 1 + \{\nu - 1\} z^\nu + \{2\nu - 1\} z^{2\nu} + \ldots,$$

$$\Psi_1(z) = \frac{F_1(z)}{a_1 z} = 1 + \frac{\{\nu + 1\}}{\{1\}} z^\nu + \frac{\{2\nu + 1\}}{\{1\}} z^{2\nu} + \ldots.$$

$$\Psi_2(z) = \frac{F_2(z)}{a_2 z^2} = 1 + \frac{\{\nu + 2\}}{\{2\}} z^\nu + \frac{\{2\nu + 2\}}{\{2\}} z^{2\nu} + \ldots,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\Psi_{\nu-1}(z) = \frac{F_{\nu-1}(z)}{a_{\nu-1} z^{\nu-1}} = 1 + \frac{\{2\nu - 1\}}{\{\nu - 1\}} z^\nu + \frac{\{3\nu - 1\}}{\{\nu - 1\}} z^{2\nu} + \ldots.$$

Wir behaupten, dass allgemein für $0 < r' < \nu$:

$$\Psi_{(m'-1)(\nu-1)+r'}(z) = 1 + \frac{\{m'\nu + r'\}}{\{(m' - 1)\nu + r'\}} z^\nu + \frac{\{(m' + 1)\nu + r'\}}{\{(m' - 1)\nu + r'\}} z^{2\nu} + \ldots$$

und:

$$c_{m'(\nu-1)+r'-1} = \frac{\{m'\nu + r'\}}{\{(m' - 1)\nu + r'\}}$$

und beweisen dies durch den Schluss von $m' - 1$ auf m'. Die Gleichung:

$$\Psi_{(m'-1)(\nu-1)+r'-1}(z) = \Psi_{(m'-1)(\nu-1)+r'} + c_{m'(\nu-1)+r'-1}\Psi_{m'(\nu-1)+r'}(z)z^{\nu}$$

ergiebt in der That:

$$c_{m'(\nu-1)+r'-1} = \frac{\{m'\nu + r'\}}{\{(m'-1)\nu + r'\}}$$

und

$$\Psi_{m'(\nu-1)+r'}(z) = 1 + \frac{\{(m'+1)\nu + r'\}}{\{m'\nu + r'\}}z^{\nu} + \ldots,$$

wenn das Entsprechende für

$$\Psi_{(m'-1)(\nu-1)+r'-1}(z) \quad \text{und} \quad \Psi_{(m'-1)(\nu-1)+r'}(z)$$

vorausgesetzt wird.

Aus der Gleichung für c, der wir auch die Form geben können:

$$c_{k-1} = \frac{\{\nu_k\}}{\{\nu_{k-\nu+1}\}}$$

folgt, dass die Grössen $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, also auch $a_1, a_2, \ldots, a_n$ rationale Funktionen von $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, \ldots, s_{\nu_n}$ sind, also der Satz:

Von denjenigen Potenzsummen, deren Indices nicht Multipla einer gegebenen ganzen Zahl sind, bilden die n ersten ein Fundamentalsystem.

Für a_n erhält man insbesondere noch:

$$a_n = \frac{\{\nu_n\}}{\{\nu_{n-\nu+1}\}}.$$

Im allgemeinen ist, nach dem Vorhergehenden, das Gleichungssystem

$$x_1^{\nu_1} + \ldots + x_n^{\nu_1} = s_{\nu_1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1^{\nu_n} + \ldots + x_n^{\nu_n} = s_{\nu_n}$$

durch ein einziges Wurzelsystem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zu erfüllen. Jede sym-

metrische Funktion von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist rationale Funktion von $s_{\nu_1}, \ldots, s_{\nu_n}$, also speciell

$$s_{\nu_{n+1}} = \frac{Q_n(s_{\nu_1}, \ldots, s_{\nu_n})}{P_n(s_{\nu_1}, \ldots, s_{\nu_n})},$$

wo P_n und Q_n teilerfremde ganze rationale Funktionen sind.

Ergiebt sich dagegen $s_{\nu_{n+1}}$ nicht als bestimmte eindeutige Funktion von $s_{\nu_1}, \ldots, s_{\nu_n}$, so kann das System

$$\begin{array}{c} x_1^{\nu_1} + \ldots + x_n^{\nu_n} = s_{\nu_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^{\nu_n} + \ldots + x_n^{\nu_n} = s_{\nu_n} \end{array}$$

nicht eindeutig lösbar sein. Wir wollen die ganze irreduktible Funktion $s_{\nu_{n+1}} P_n(s_{\nu_1}, \ldots, s_{\nu_n}) - Q_n(s_{\nu_1}, \ldots, s_{\nu_n})$ mit $R_{n+1}(s_{\nu_1}, \ldots, s_{\nu_{n+1}})$ bezeichnen. Dann folgt also aus dem Bestehen der Gleichungen:

$$\begin{array}{c} x_1^{\nu_1} + \ldots + x_n^{\nu_1} = s_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^{\nu_{n+1}} + \ldots + x_n^{\nu_{n+1}} = s_{\nu_{n+1}} \end{array}$$

die Gleichung:

$$R_{n+1}(s_{\nu_1}, \ldots, s_{\nu_{n+1}}) = 0.$$

Der Fall der Unbestimmtheit tritt ein, wenn die Kettenbruchentwicklung mit c_{n-k-1} abbricht und $k \geq \nu$ ist. Die Funktionen

$$1 + a_\nu z^\nu + \ldots, \qquad a_1 z + a_{\nu+1} z^{\nu+1} + \ldots, \qquad \ldots, \qquad a_{\nu-1} z^{\nu-1} + \ldots$$

erhalten dann einen willkürlichen Faktor

$$1 + \alpha_1 z^\nu + \ldots + \alpha_{\left[\frac{k}{\nu}\right]} z^{\nu\left[\frac{k}{\nu}\right]}$$

und unter den n Wurzeln $x_1, \ldots, x_n$ der Gleichungen:

$$\begin{array}{c} x_1^{\nu_1} + \ldots + x_n^{\nu_n} = s_{\nu_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^{\nu_n} + \ldots + x_n^{\nu_n} = s_{\nu_n} \end{array}$$

sind $\left[\frac{k}{\nu}\right]$ ν-tupel vorhanden, z. B. $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, für welche $x_h = \varepsilon^h x_1$ $(h = 1, 2, \ldots, \nu - 1)$, also

$$x_1^{\nu_1} + \ldots + x_\nu^{\nu_1} = 0,$$
$$x_1^{\nu_2} + \ldots + x_\nu^{\nu_2} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_1^{\nu_m} + \ldots + x_\nu^{\nu_m} = 0$$

und $k - \nu\left[\frac{k}{\nu}\right]$ Wurzeln Null, so dass für die übrigen $n - k$ die Gleichungen bestehen:

$$x_{k+1}^{\nu_1} + \ldots + x_n^{\nu_1} = s_{\nu_1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{k+1}^{\nu_m} + \ldots + x_n^{\nu_m} = s_{\nu_m}.$$

Also ist:

$$R_n = 0, \qquad R_{n-1} = 0, \quad \ldots, \quad R_{n-k+1} = 0.$$

Da für den Fall der Unbestimmtheit $k \geqq \nu$ sein muss, so ist mindestens:

$$R_n = 0, \qquad R_{n-1} = 0, \quad \ldots, \quad R_{n-\nu+1} = 0.$$

Umgekehrt beweist man wie unter II. dass, wenn diese ν Grössen verschwinden, die Gleichungen:

$$x_{\nu+1}^{\nu_1} + \ldots + x_n^{\nu_1} = s_{\nu_1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{\nu+1}^{\nu_m} + \ldots + x_n^{\nu_m} = s_{\nu_m}$$

erfüllbar sind, also der Fall der Unbestimmtheit eintritt. Also:

Für das Eintreten des Falles der Unbestimmtheit ist nothwendig und hinreichend dass die ν Grössen $R_n, R_{n-1}, \ldots, R_{n-\nu+1}$ verschwinden.

Daraus folgt, beiläufig bemerkt, dass das System $(R_n, R_{n-1}, R_{n-2}, \ldots, R_{n-\nu+1})$ äquivalent ist dem System der $\nu - 1$ symmetrischen Produkte:

$$\Pi(x_1^h + \ldots + x_\nu^h) \qquad {\scriptstyle (h=1,\ldots,\nu-1)}$$

welches hier an die Stelle der Geminanten $\Pi(x_1 + x_2)$ tritt.

Wir sprechen noch das Corollar aus:

Wenn $R_n = 0, \ldots, R_{n-\nu+2} = 0$, so tritt der Fall der Unbestimmtheit dann und nur dann ein, wenn auch noch $R_{n-\nu+1} = 0$ ist.

Die Gleichung:

$$R_n(s_{\nu_1} - x^{\nu_1}, \ldots, s_{\nu_n} - x^{\nu_n}) = 0$$

ist — man beweist dies wie früher — für $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$ erfüllt und für keinen weiteren Wert von x. Die linke Seite derselben kann, wegen $a_n = \frac{\{\nu_n\}}{\{\nu_{n-\nu+1}\}}$ und $R_n = \{\nu_n\}$ keine Potenz der Gleichung $a_n + a_{n-1}x + \ldots + x^n = 0$ sein.

Setzt man also:

$$R_n(s_{\nu_1} - x^{\nu_1}, \ldots, s_{\nu_n} - x^{\nu_n}) = R_n(s_{\nu_1}, \ldots, s_{\nu_n}) + \ldots + R_n^{(n)}(s_{\nu_1}, \ldots, s_{\nu_n})x^n,$$

so ist:

$$a_n = \frac{R}{R_n^{(n)}}, \qquad a_{n-1} = \frac{R_n^{(1)}}{R_n^{(n)}}, \text{ u. s. w.}$$

Nun muss im Fall der Unbestimmtheit jedenfalls a_n unbestimmt, also $R_n = 0$ und $R_n^{(n)} = 0$ werden. Also, da $R_n^{(n)} = \{\nu_{n-\nu+1}\}$ wird, folgt:

Wenn $R_n = 0, \ldots, R_{n-\nu+2} = 0$ ist, so tritt der Fall der Unbestimmtheit dann und nur dann ein, wenn auch $R_n^{(n)} = 0$ ist.

Durch Vergleichung mit dem entsprechenden früheren Resultat bezüglich $R_{n-\nu+1}$, und wegen $R_{n-\nu+1} = \{\nu_{n-\nu+1}\}$ und $R_n^{(n)} = \{\nu_{n-\nu+1}\}$ folgt jetzt, dass $R_n^{(n)} = R_{n-\nu+1}$ ist, bis auf einen Zahlenfaktor.

Also wird:

$$a_n = c_{n-1}c_{n-\nu-1}c_{n-2\nu-1}\ldots = \frac{R_n}{R_{n-\nu+1}}$$

und allgemein

$$c_{k-1}c_{k-\nu-1}c_{k-2\nu-1}\ldots = \frac{R_k}{R_{k-\nu+1}}$$

woraus

$$c_{k-1} = \frac{R_k}{R_{k-\nu+1}} : \frac{R_{k-\nu}}{R_{k-2\nu+1}}$$

folgt, bis auf einen Zahlenfaktor.

Ferner ergiebt sich $s_{\nu_{n+1}}$ als ganze Funktion von $a_n = \frac{R}{R_{n-\nu+1}}$, $a_{n-1} = \frac{R_n^{(1)}}{R_{n-\nu+1}}, \ldots,$ also als rationale Funktion von $s_{\nu_1}, \ldots, s_{\nu_n}$, deren Nenner eine Potenz von $R_{n-\nu+1}$ ist. Daher

$$R_{n+1} = s_{\nu_{n+1}} R_{n-\nu+1}^{\gamma_{n-\nu+1}} - Q_n.$$

Ist p_n das Gewicht von R_n, so folgt aus

$$a_n R_{n-\nu+1} = R_n$$

dass

$$p_n = n + p_{n-\nu+1} = n + (n - \nu + 1) + (n - 2(\nu - 1)) + \ldots$$
$$+ (n - (m' - 1)(\nu - 1)) + p_{n-m'(\nu-1)}$$

ist; ist

$$n = m'(\nu - 1) + r' \quad (r' < \nu - 1)$$

so ist

$$p_{n-m'(\nu-1)} = n - m'(\nu - 1)$$

also

$$p_n = n + (n - (\nu - 1)) + (n - 2(\nu - 1)) + \ldots + (n - m'(\nu - 1)).$$

Nunmehr folgt aus:

$$p_{n+1} = \nu_{n+1} + \gamma_{n-\nu+1} p_{n-\nu+1}$$

dass

$$\gamma_{n-\nu+1} = \frac{-\nu_{n+1} + (n+1) + (n+1-(\nu-1)) + \ldots + (n+1-m'(\nu-1))}{(n-(\nu-1)) + \ldots + (n-m'(\nu-1))}$$

ist; für

$$r' < \nu - 2 \quad \text{ist} \quad \nu_{n+1} = m'\nu + r' + 1$$

und für

$$r' = \nu - 2 \quad \text{ist} \quad \nu_{n+1} = (m' + 1)\nu.$$

Demnach beträgt die Differenz des Zählers und Nenners von $\gamma_{n-\nu+1}$ im ersten Fall:

$$-(m'\nu + r' + 1) + (n + 1) + m' = 0$$

und im zweiten Fall:

$$-(m'+1)\nu+(n+1)+m'=0.$$

Also ist $\gamma_{n-\nu+1}=1$ und

$$R_{n+1}=s_{\nu_{n+1}}R_{n-\nu+1}-Q_n$$

bis auf einen Zahlenfaktor.

Wir hatten die Kettenbruchentwicklung:

$$\Psi_{k-1}(z)=\Psi_k(z)+z^\nu c_{k+\nu-2}\Psi_{k+\nu-1}(z),$$

die an die Funktionen

$$\Psi_h(z)=\frac{\Phi_h(z)}{\Phi_h(0)} \qquad (h=0,1,\ldots,\nu-1)$$

anknüpfte. Wir wollen derselben eine andere Form geben, indem wir von

$$\Phi_h(z)=\frac{F^h(z)}{z^h} \qquad (h=0,1,\ldots,\nu-1)$$

ausgehen und die Funktionen: $\Phi_\nu(z)$, $\Phi_{\nu+1}(z)$, ... durch die Recursionsformel definiren:

$$\Phi_{k-1}(z)=q_k\Phi_k(z)+z^\nu\Phi_{k+(\nu-1)}(z).$$

Dann giebt die Vergleichung mit:

$$\frac{\Phi_{k-1}(z)}{\Phi_{k-1}(0)}=\frac{\Phi_k(z)}{\Phi_k(0)}+z^\nu c_{k+\nu-2}\frac{\Phi_{k+\nu-1}(z)}{\Phi_{k+\nu-1}(0)}$$

dass

$$q_k=\frac{\Phi_{k-1}(0)}{\Phi_k(0)}$$

und

$$c_{k-1}=\frac{\Phi_k(0)}{\Phi_{k-\nu}(0)}.$$

Setzt man das letztere Resultat in die Form:

$$\Phi_k(0).\frac{R_{k-\nu+1}}{R_k}=\Phi_{k-\nu}(0).\frac{R_{k-\nu}}{R_{k-2\nu+1}}$$

und berücksichtigt die Anfangswerte:

$$\begin{aligned} c_0 &= a_1 = R_1 = \Phi_1(0), \\ c_1 &= a_2 = R_2 = \Phi_2(0), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ c_{\nu-2} &= a_{\nu-1} = R_{\nu-1} = \Phi_{\nu-1}(0), \end{aligned}$$

so ergiebt sich allgemein:

$$\Phi_k(0) = \frac{R_k}{R_{k-\nu+1}}$$

womit auch $q_k = \frac{R_{k-1}}{R_{k-\nu}} : \frac{R_k}{R_{k-\nu+1}}$ und damit die Kettenbruchentwicklung bestimmt ist. Hier ist $R_0 = 1$, $R_{-1} = 1$, $R_{-2} = 1$, u. s. w. zu setzen.

Es bleibt die Bestimmung der Zahlenfaktoren. Nehmen wir die R_k mit einem solchen Zahlenfaktor multiplizirt an dass darin $s_1^{p_k}$ den Koefficienten $(-1)^{p_k}$ hat, so werde

$$q_k = \lambda_k \cdot \frac{R_{k-1}}{R_{k-\nu}} : \frac{R_k}{R_{k-\nu+1}},$$

wo λ_k die zu bestimmenden Zahlenfaktoren sind.

Setzen wir jetzt:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = -\frac{1}{n}$$

und dann $n = \infty$, so werden alle $R_k = 1$, und:

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= 1 + \frac{z^\nu}{\nu!} + \frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!} + \cdots \\ \Phi_1(z) &= \frac{1}{1!} + \frac{z^\nu}{(\nu+1)!} + \frac{z^{2\nu}}{(2\nu+1)!} + \cdots \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \Phi_{\nu-1}(z) &= \frac{1}{(\nu-1)!} + \frac{z^\nu}{(2\nu-1)!} + \frac{z^{2\nu}}{(3\nu-1)!} + \cdots \end{aligned}$$

und durch die Formel:

$$\Phi_{k-1}(z) = \lambda_k \Phi_k(z) + z^\nu \Phi_{k+\nu-1}(z) \qquad (k=1,2,\dots)$$

werden sowohl die Zahlen λ_k, als auch die Funktionen:

$$\Phi_\nu(z)\;,\;\Phi_{\nu+1}(z)\;,\;\Phi_{\nu+2}(z),\;\text{u. s. w.}$$

vollständig bestimmt.

Man findet nämlich, wegen $\nu_{h(\nu-1)+k} - \nu_k = h\nu$:

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{\nu_1 \cdot \nu_2 \ldots \nu_k} + \frac{z^\nu}{\underline{|\nu}\, \nu_\nu \ldots \nu_{\nu-1+k}} + \frac{z^{2\nu}}{\underline{|2\nu}\, \nu_{2\nu-1} \ldots \nu_{2\nu-2+k}} + \frac{z^{3\nu}}{\underline{|3\nu}\, \nu_{3\nu-2} \ldots \nu_{3\nu-3+k}} + \ldots$$

und

$$\lambda_k = \nu_k;$$

daraus folgt im allgemeinen Falle:

$$\Phi_k(0) = \frac{1}{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_k} \frac{R_k}{R_{k-(\nu-1)}},$$

wodurch auch

$$q_k = \nu_k \frac{R_{k-1}}{R_{\nu-1}} : \frac{R_k}{R_{k-\nu+1}}$$

und c_k bestimmt sind. Aus $a_n = \Phi_n(0)$ folgt noch

$$a_n = \frac{1}{\nu_1 \ldots \nu_\nu} \frac{R_n}{R_{n-\nu+1}}.$$

Die Aufgabe die Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ als rationale Funktionen der $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, \ldots, s_{\nu_n}$ anzugeben, ist durch die vorstehenden Entwicklungen vollständig und in einfacher Weise gelöst.

Königsberg Pr. im Oktober 1898.

ÜBER DIE INVARIANTEN LINEARER UND QUADRATISCHER BINÄRER DIFFERENTIALFORMEN UND IHRE ANWENDUNG AUF DIE DEFORMATION DER FLÄCHEN

VON

GERHARD HESSENBERG

in CHARLOTTENBURG—BERLIN.

In der vorliegenden Arbeit habe ich versucht, die Hauptformeln der allgemeinen Flächentheorie, unter specieller Beachtung des Biegungsproblems, einerseits in möglichst algebraischer und formal abgekürzter Weise, andererseits so herzuleiten, dass die Invarianz der für allgemeine Coordinaten gültigen Formeln unmittelbar in die Augen springt.

Zu diesem Zwecke ist zunächst durch Anwendung der Begriffe der Co- und Contragredienz das Nachrechnen von Transformationen vermieden. Sodann ist durch Einführung einer der Differentiation verwandten Operation, die ich cogrediente Differentiation nenne, erreicht worden, dass die cogredienten Differentiale irgend welcher Grössen bei Coordinatentransformationen dieselben Substitutionen erleiden, wie diese Grössen selbst.

Mit den in den ersten vier Abschnitten gewonnenen Hülfsmitteln ergeben sich im Abschnitt V die Eigenschaften der gebräuchlichen Differentialparameter. Abschnitt VII giebt einen Überblick über die vielgebrauchten orthogonalen Systeme, die von zwei Parametern abhängen. Sodann folgt im Abschnitt VIII die Herleitung der Differentialgleichung

$$\Delta_{22}z = K(1 - \Delta_1 z),$$

in IX die der Codazzischen Formeln und der Gaussischen Relation, in X die der Weingartenschen Differentialgleichung, aus der sich die bisher bekannten Classen aufeinander abwickelbarer Flächen bestimmen lassen.[1]

Im folgenden Abschnitt wird eine eigenartige Singularität der letztgenannten Differentialgleichung untersucht, auf die inzwischen auch Hr. WEINGARTEN selbst unter Bezugnahme auf vorliegende Arbeit aufmerksam gemacht hat.[2]

Unter Umständen liefert nämlich die in Rede stehende Differentialgleichung nicht alle Biegungen der gegebenen Fläche. Ich zeige, dass die Differentialgleichung auf unendlich viele Arten so aufgestellt werden kann, dass eine beliebig vorgeschriebene Biegung durch ihre Integration nicht gefunden wird. Andererseits lässt sich für jede Fläche diese Singularität vermeiden. Ich leite ferner das Kriterium für das Eintreten derselben mit Hülfe einer im Abschnitt VI geführten Untersuchung her und zeige, dass die Bestimmung der nicht gefundenen Biegungen auf eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung führt.

Im letzten Abschnitt sind einige specielle Beispiele hierzu untersucht.

Es sei mir an dieser Stelle gestattet, den Hrn. WEINGARTEN und KNOBLAUCH für ihr Interesse an der vorliegenden Arbeit und nützliche Ratschläge bei der Ausarbeitung meinen Dank auszusprechen.

I.

§ 1. In den nachfolgenden Untersuchungen bezeichnet abkürzungsweise $\xi, x, \xi_{(i)}$ oder $x_{(i)}$ das System der n Grössen $\xi_\lambda, x_\lambda, \xi_{i,\lambda}$ oder $x_{i,\lambda}$, $\lambda = 1, 2 \ldots n$. Von zwei Systemen, die mit entsprechenden Buchstaben des griechischen und lateinischen Alphabets bezeichnet sind, soll angenommen werden, dass sie *contragredient* sind, d. h., dass bei linearer Transformation des einen das andere die inverse und transponierte Substitution

[1] WEINGARTEN, *Mémoire sur la déformation des surfaces,* Preisschrift der Pariser-Akademie. Acta math. Bd. 20, p. 159 ff. Die Citate beziehen sich auf die Publication in den »Mémoires présentés par divers savants etc.» Bd. XXXII.

DARBOUX. *Théorie générale des surfaces.* Bd. IV, letztes Capitel.

RICCI. *Della equazione fondamentale di Weingarten.* Atti dell'Istituto Veneto dei scienze, lettere ed arti, T. VIII. S. VII. 1896—97.

[2] *Note zur Theorie der Deformation der Flächen.* Acta math. 22, pag. 193 ff.

erleidet. Damit die inverse Substitution existiert, darf natürlich die Substitutionsdeterminante nicht verschwinden.

Die Bedeutung des Begriffes der Contragredienz liegt in folgenden Sätzen, die aus der Theorie der linearen Transformationen bekannt sind:

I. *Sind die Systeme ξ und x contragredient, so ist der Ausdruck $\sum_\lambda \xi_\lambda x_\lambda$ invariant.*

II. *Ist $\sum x_\lambda \xi_\lambda$ bei linearen Transformationen der ξ_λ invariant, und können die ξ_λ n Wertesysteme annehmen, deren Determinante nicht verschwindet, so sind die Systeme ξ und x contragredient.*

Der Ausdruck $\sum_\lambda x_\lambda \xi_\lambda$ soll mit (x, ξ) bezeichnet werden.

Das Wort »*invariant*» gebrauche ich ausschliesslich im Sinne von »*absolut invariant*» und denke mir unter T eine Funktion, die die Eigenschaft besitzt, bei linearer Transformation der Variabeln ξ sich mit der Substitutionsdeterminante zu multiplicieren. Durch Multiplication mit einer Potenz von T kann jede Invariante im weiteren Sinne in eine absolute verwandelt werden. Über T wird an geeigneter Stelle verfügt werden.

Aus n cogredienten Systemen $\xi_{(\iota)}$ und n ihnen contragredienten $x_{(\iota)}$ bildet man die Invarianten $T|\xi_{\iota,\lambda}|$ und $T^{-1}|x_{\iota,\lambda}|$, $(\iota, \lambda = 1, 2, \ldots, n)$. Da sie lineare Formen jedes der Systeme sind, erhält man aus (II) den Satz:

III. *Bildet man aus $(n-1)$ den ξ cogredienten (bezw. contragredienten) Systemen die Determinanten $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, so ergeben diese (bei geeigneter Wahl der Vorzeichen) mit T (bezw. T^{-1}) multipliciert ein den ξ contragredientes (bezw. cogredientes) System.*

§ 2. ξ und ξ^* seien zwei Systeme von n bezw. m Variabeln; x und x^* seien ihnen contragredient. Erfahren ξ und ξ^* die Substitutionen

$$(1) \qquad \xi_\lambda = \sum_\rho s_{\lambda\rho}\xi'_\rho, \qquad \xi^*_\lambda = \sum_\rho s^*_{\lambda\rho}\xi^{*\prime}_\rho,$$

so ist

$$(1_a) \qquad x'_\rho = \sum_\lambda s_{\lambda\rho}x_\lambda, \qquad x^{*\prime}_\rho = \sum_\lambda s^*_{\lambda\rho}x^*_\lambda.$$

Das System der nm Grössen $\xi_\lambda\xi^*_\mu$ werde mit $\xi\xi^*$ bezeichnet.[1] Es wird linear transformiert durch

$$(2) \qquad \xi_\lambda\xi^*_\mu = \sum_{\rho,\sigma} s_{\lambda\rho}s^*_{\mu\sigma}\xi'_\rho\xi^{*\prime}_\sigma$$

[1] $\xi\xi^*$ ist im allgemeinen von $\xi^*\xi$ verschieden!

und das System xx^* durch

$$(2_a)\qquad x'_\rho x^{*\prime}_\sigma = \sum_{\lambda,\mu} s_{\lambda\rho} s^*_{\mu\sigma} x_\lambda x^*_\mu,$$

Die Determinanten von (2) und (2_a) haben nach einem Satz von KRONECKER[1] den Wert $|s_{\lambda\rho}|^m . |s^*_{\mu\sigma}|^n$, sind also nicht null. Daraus folgt:

IV. *Ist ξ zu x, ξ^* zu x^* contragredient, so ist auch $\xi\xi^*$ zu xx^* contragredient.*

Denn da die Determinante von (2) und (2_a) nicht null ist, ist (2_a) die inverse und transponierte Substitution von (2).

A bezeichne das Coefficientensystem der bilinearen Form

$$\sum a_{\lambda\mu} \xi_\lambda \xi^*_\mu,$$

$\mathfrak{E}$ speciell das der Grössen $\mathfrak{e}_{\lambda\mu}$, wo $\mathfrak{e}_{\lambda\mu}$ die Null oder Einheit bedeutet, jenachdem λ von μ verschieden oder gleich μ ist. Das System $\xi\xi^*$ kann nm Wertsysteme annehmen, deren Determinante nicht null ist, z. B. für $\xi_{i,\lambda} = \xi^*_{i,\lambda} = \mathfrak{e}_{i\lambda}$. Mithin ist A dem System $\xi\xi^*$ contragredient. Ist B das Coefficientensystem der Form

$$\sum \beta_{\lambda\mu} x_\lambda x^*_\mu,$$

so sind ebenso die $\beta_{\lambda\mu}$ den $x_\lambda x^*_\mu$ contragredient, also nach IV auch den $a_{\lambda\mu}$. Man erhält damit den Satz:

V. *Sind $\sum a_{\lambda\mu} \xi_\lambda \xi^*_\mu$ und $\sum \beta_{\lambda\mu} x_\lambda x^*_\mu$ zwei Contravarianten, so ist der Ausdruck $\sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu} \beta_{\lambda\mu}$ invariant.*

Er werde künftig mit (A, B) bezeichnet, also consequenterweise die Formen selbst mit

$$(A, \xi\xi^*) \text{ und } (B, xx^*),$$

wonach auch

$$(3)\qquad (xx^*, \xi\xi^*) = (x, \xi)(x^*, \xi^*).$$

Ist $n = m$, so ist das System A quadratisch, und seine Determinante multipliciert sich mit den Substitutionsdeterminanten der ξ und ξ^*. Haben

[1] Siehe HENSEL, *Über die Darstellung der Determinante eines Systems, welches aus zwei andern componiert ist.* Acta mathematica, 14, pag. 317—319.

wir nur die zwei Sorten ξ und x von Variabeln, so giebt es drei Typen von Formen:

$$(A, \xi\eta), (B, xy), (\mathfrak{C}, x\eta)$$

mit den Invarianten

$$Da = T^{-2}|a_{\lambda\mu}|; \qquad D\beta = T^2|\beta_{\lambda\mu}|; \qquad D\mathfrak{c} = |\mathfrak{c}_{\lambda\mu}|.$$

Die Formen des Typus $\mathfrak{C}$ heissen Zwischenformen; zu ihnen gehört $\mathfrak{E}$. Als

$$\sum \mathfrak{e}_{\lambda\mu}\xi_\lambda y_\mu$$

aufgefasst ist sie zu $\mathfrak{C}$ contravariant und bildet mit $\mathfrak{C}$ die Invariante

$$(\mathfrak{E}, \mathfrak{C}) = \sum_{\lambda,\mu} \mathfrak{e}_{\lambda\mu}\mathfrak{c}_{\lambda\mu} = \sum_\lambda \mathfrak{c}_{\lambda\lambda},$$

die auch mit $M\mathfrak{C}$ bezeichnet werden soll.

§ 3. Betrachtet man $(A, \xi\xi^*)$ als lineare Form der ξ^*, so ergiebt sich der Satz:

VI. *Die Grössen* $^a x_\mu = \sum_\lambda a_{\lambda\mu}\xi_\lambda$ *sind den* ξ^* *contragredient.*

Setzt man sie daher in die Form B ein, so erhält man den neuen invarianten Ausdruck

$$(B, x.{}^a x) = \sum_{\lambda,\mu,\nu} \beta_{\lambda\mu} x_\lambda \,.\, a_{\nu\mu}\xi_\nu,$$

der eine Zwischenform mit den Coefficienten

$$\mathfrak{c}_{\lambda\nu} = \sum_\mu \beta_{\lambda\mu} a_{\nu\mu}$$

darstellt. Es ist

(4) $$M\mathfrak{C} = \sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu}\beta_{\lambda\mu} = (A, B).$$

Setzt man

$$a_{\lambda\mu} = - {}^*a_{\mu\lambda},$$

so wird

$$(A, \xi\xi^*) = -({}^*A, \xi^*\xi)$$

und nach der soeben eingeführten Bezeichnung

$$\sum_\mu a_{\lambda\mu}\xi^*_\mu = - {}^{*a}x^*_\lambda,$$

(5) $$(A, \xi\xi^*) = ({}^a x, \xi^*) = -({}^{*a}x^*, \xi).$$

Die analoge Bezeichnung soll auf die Contravarianten von A zunächst *nicht* angewandt werden.

Werden irgend welche cogredienten Systeme ξ, η oder A, B zu dem cogredienten System der Grössen $h\xi_\lambda + k\eta_\lambda$ oder $ha_{\lambda\mu} + kb_{\lambda\mu}$ vereinigt (vorausgesetzt, dass h und k Invarianten sind), so soll das neu entstandene System mit $h\xi + k\eta$ oder $hA + kB$ bezeichnet werden. Da die eingeführten Ausdrücke mit Ausnahme von Da in den auftretenden Systemen linear sind, ist

$$(6) \quad \begin{cases} (hA + kB, \Gamma) = h(A, \Gamma) + k(B, \Gamma), \\ ({}^a(hx + ky), \zeta) = h({}^a x, \zeta) + k({}^a y, \zeta), \\ ({}^{ha+kb}x, \eta) \quad = h({}^a x, \eta) + k({}^b x, \eta). \end{cases}$$

II.

§ 4. Wenn n unabhängige Variable u_λ in irgend einer Weise durch n andere, ebenfalls unabhängige, u'_λ so ausgedrückt werden, dass weder zwischen den u_λ noch zwischen den u'_λ eine Beziehung entsteht, so werden die Differentiale du_λ durch die du'_λ *linear* ausgedrückt, und die Determinante der linearen Substitution der Differentiale verschwindet nicht identisch.

Für ein bestimmtes Wertesystem der u_λ können die du_λ beliebige Werte durchlaufen. Man kann daher beliebig viele von einander unabhängig variierende Systeme $d_1 u_\lambda, d_i u_\lambda$ von Differentialen annehmen. Denkt man sich z. B. die u_λ als Funktionen von mehreren Gruppen von je n unabhängigen Parametern, so erfüllen die in Bezug auf die einzelnen Gruppen gebildeten Differentialsysteme die gestellte Anforderung.

Bei dieser speciellen Annahme sind (unter Voraussetzung der Stetigkeit der zweiten Ableitungen) die in Bezug auf die einzelnen Gruppen von Parametern ausgeführten Differentiationen vertauschbar. Es sollen auch im folgenden durch das Zeichen d nur solche Differentiationen bezeichnet werden, für die das Gesetz der Vertauschbarkeit erfüllt ist. Die anderen Systeme von Differentialen zählen dann unter die allgemein zu betrachtenden Systeme, die den Differentialen cogredient sind.

§ 5. Nunmehr sei $(A, d_1 u d_2 u) = \sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu} d_1 u_\lambda d_2 u_\mu$ eine bilineare *symmetrische* Form der Differentiale. Ihre Determinante sei nicht identisch null, und für T werde eine zweite Wurzel aus derselben gewählt, so dass

$$Da = 1$$

wird.

Nun ist:

$$d_3(A, d_1 u d_2 u) = \sum a_{\lambda\mu} d_3 d_1 u_\lambda d_2 u_\mu + \sum a_{\lambda\mu} d_1 u_\lambda d_3 d_2 u_\mu + \sum d_3 a_{\lambda\mu} d_1 u_\lambda d_2 u_\mu$$

ein invarianter Ausdruck. Von den Summen der rechten Seite ist die erste symmetrisch in Bezug auf die Differentiationen d_1 und d_3. Bezeichnet man sie daher vorübergehend mit A_2, so ist die zweite gleich A_1. Setzt man noch S_3 für die dritte, so ist

$$d_3(A, d_1 u d_2 u) = A_1 + A_2 + S_3,$$

also

$$d_2(A, d_3 u d_1 u) = A_3 + A_1 + S_2$$

und

$$d_1(A, d_2 u d_3 u) = A_2 + A_3 + S_1.$$

Um die zweiten Differentiale $d_1 d_2 u_\lambda$ gesondert zu betrachten, löse man nach A_3 auf:

$$\frac{1}{2}\{d_1(A, d_2 u d_3 u) + d_2(A, d_3 u d_1 u) - d_3(A, d_1 u d_2 u)\} \tag{7}$$

$$= A_3 + \frac{1}{2}(S_1 + S_2 - S_3).$$

Das zweite Glied der rechten Seite ist eine trilineare Form der $d_\alpha u_\lambda$. Der Coefficient von $d_1 u_\rho d_2 u_\sigma d_3 u_\mu$ ist

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial a_{\rho\mu}}{\partial u_\sigma} + \frac{\partial a_{\sigma\mu}}{\partial u_\rho} - \frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial u_\mu}\right] = \begin{bmatrix}\rho\sigma\\ \mu\end{bmatrix}$$

in Christoffels Bezeichnung. Dadurch wird die rechte Seite von (7) zu

$$\sum_\mu d_3 u_\mu \cdot \left\{\sum_\lambda a_{\lambda\mu} d_1 d_2 u_\lambda + \sum_{\rho,\sigma} \begin{bmatrix}\rho\sigma\\ \mu\end{bmatrix} d_1 u_\rho d_2 u_\sigma\right\}, \tag{8}$$

und da dieser Ausdruck wegen (7) invariant ist, sind die Coefficienten

der $d_3 u_\mu$ in ihm den Differentialen contragredient. Setzt man noch mit CHRISTOFFEL

$$\begin{bmatrix}\rho\sigma\\ \mu\end{bmatrix} = \sum_\lambda a_{\lambda\mu}\begin{Bmatrix}\rho\sigma\\ \lambda\end{Bmatrix},$$

so wird aus (8)

$$(8') \qquad \sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu}\left[d_2 d_1 u_\lambda + \sum_{\rho\sigma}\begin{Bmatrix}\rho\sigma\\ \lambda\end{Bmatrix} d_1 u_\rho d_2 u_\sigma\right] d_3 u_\mu .$$

Führt man die Abkürzungen

$$\sum_\sigma \begin{Bmatrix}\rho\sigma\\ \lambda\end{Bmatrix} d_i u_\sigma = \begin{Bmatrix}\rho\\ \lambda\end{Bmatrix}_i$$

$$\text{und}\quad d_i\zeta_\lambda + \sum_\lambda \begin{Bmatrix}\lambda\\ \rho\end{Bmatrix}_i \zeta_\rho = \partial_i\zeta_\lambda \quad \text{ein,}$$

so wird der Ausdruck in der eckigen Klammer in (8') zu

$$(9) \qquad \partial_2 d_1 u_\lambda = \partial_1 d_2 u_\lambda ,$$

und diese Grössen sind infolge der Invarianz von (8') *den* du_λ *cogredient.*

§ 6. Die Abkürzung ∂ bedeutet nicht, wie d, eine auf jede Grösse anwendbare Operation, sondern ist wie ein dem Buchstaben ζ beigefügter Index aufzufassen. $\partial\zeta_\lambda$ steht für $(\partial\zeta)_\lambda$, und das System $\partial\zeta$ ist aus dem System ζ gebildet. *Ferner soll die in* (9) *gebrauchte Bezeichnung* ∂ *nur unter dem Vorbehalt gelten, dass die* ζ_λ *den Differentialen* du_λ *cogredient sind.* Für andere Systeme von Grössen wird das Zeichen ∂ in anderem Sinne gebraucht werden. Es gilt dann folgende Verallgemeinerung des eben Bewiesenen:

VII. *Sind die Grössen* ζ_λ *den Differentialen* du_λ *cogredient, so gilt das gleiche von den Ausdrücken* $\partial\zeta_\lambda$.

Drückt man nämlich in dem invarianten Gebilde

$$d\sum_\lambda x_\lambda\zeta_\lambda = \sum_\lambda dx_\lambda\,\zeta_\lambda + \sum_\lambda x_\lambda\, d\zeta_\lambda$$

$d\zeta_\lambda$ durch $\partial\zeta_\lambda$ aus, so erhält man:

$$(10) \qquad d\sum_\lambda x_\lambda\zeta_\lambda = \sum_\lambda \partial x_\lambda \,.\, \zeta_\lambda + \sum_\lambda x_\lambda \,.\, \partial\zeta_\lambda ,$$

wo

$$\delta x_\lambda = dx_\lambda - \sum_\rho \begin{Bmatrix} \lambda \\ \rho \end{Bmatrix} x_\rho$$

gesetzt ist. Wählt man für die ζ_λ Differentiale, so ist nach dem zuletzt bewiesenen die zweite Summe der rechten Seite in (10) für sich invariant, also auch die erste, d. h.:

VIII. *Sind die Grössen x_λ den Differentialen du_λ contragredient, so gilt das gleiche von den Grössen δx_λ.*

Hiernach ist aber $\Sigma \delta x_\lambda \cdot \zeta_\lambda$ überhaupt invariant, damit auch $\Sigma x_\lambda \delta \zeta_\lambda$, woraus VII folgt. Ich will demgemäss die $\delta\zeta$ und δx als »*cogrediente Differentiale*» der ζ und x bezeichnen.

§ 7. Nachdem erst die Existenz cogredienter Differentiale erwiesen ist, kann man die Theorie derselben auf allgemeinster Grundlage aufbauen. Ich beschränke mich aber auf bilineare Formen.

Es mögen Grössen $\begin{Bmatrix} \rho \\ \lambda \end{Bmatrix}$ und $\begin{Bmatrix} \rho \\ \lambda \end{Bmatrix}^*$ von der Beschaffenheit existieren, dass die Differentialausdrücke

$$\delta\zeta_\lambda = d\zeta_\lambda + \sum_\rho \begin{Bmatrix} \rho \\ \lambda \end{Bmatrix} \zeta_\rho \quad \text{und} \quad \delta\zeta_\lambda^* = d\zeta_\lambda^* + \sum_\rho \begin{Bmatrix} \rho \\ \lambda \end{Bmatrix}^* \zeta_\rho^*$$

den ζ_λ bezw. ζ_λ^* cogredient seien. Setzt man dann, wie soeben geschehen,

$$d\Sigma x_\lambda \zeta_\lambda = \Sigma x_\lambda \delta\zeta_\lambda + \Sigma \zeta_\lambda \delta x_\lambda,$$

so findet man, dass die Ausdrücke

$$\delta x_\lambda = dx_\lambda - \sum_\rho \begin{Bmatrix} \lambda \\ \rho \end{Bmatrix} x_\rho$$

den x_λ cogredient sind. Das entsprechende gilt für die gesternten Grössen.

Nunmehr sind die Grössen

$$\zeta_\lambda \delta\zeta_\mu^* \text{ und } \delta\zeta_\lambda \cdot \zeta_\mu^*,$$

also auch

$$\zeta_\lambda \delta\zeta_\mu^* + \delta\zeta_\lambda \zeta_\mu^*$$

den $\zeta_\lambda \zeta_\mu$ cogredient. Sie seien mit $\delta(\zeta_\lambda \zeta_\mu^*)$ bezeichnet. Sie sind nach IV den ebenso gebildeten $\delta(x_\lambda x_\mu^*)$ contragredient.

Setzt man $\zeta_\lambda \zeta_\mu^* = \beta_{\lambda\mu}$, $x_\lambda x_\mu^* = a_{\lambda\mu}$, so wird:

$$\delta\beta_{\lambda\mu} = d\beta_{\lambda\mu} + \sum_\rho \begin{Bmatrix}\rho\\ \lambda\end{Bmatrix} \beta_{\rho\mu} + \sum_\rho \begin{Bmatrix}\rho\\ \mu\end{Bmatrix}^* \beta_{\lambda\rho},$$

$$\delta a_{\lambda\mu} = da_{\lambda\mu} - \sum_\rho \begin{Bmatrix}\lambda\\ \rho\end{Bmatrix} a_{\rho\mu} - \sum_\rho \begin{Bmatrix}\mu\\ \rho\end{Bmatrix}^* a_{\lambda\rho}.$$

Die Bezeichnung sei allgemein beibehalten für irgend welche den $\zeta_\lambda \zeta_\mu^*$ co- bezw. contragrediente Grössen. Dann ist identisch

$$\Sigma a_{\lambda\mu} \delta\beta_{\lambda\mu} + \Sigma \delta a_{\lambda\mu} \,.\, \beta_{\lambda\mu} = d\Sigma a_{\lambda\mu} \beta_{\lambda\mu},$$

also speciell

$$d\Sigma a_{\lambda\mu} \zeta_\lambda \zeta_\mu^* = \Sigma a_{\lambda\mu} \zeta_\lambda \delta\zeta_\mu^* + \Sigma a_{\lambda\mu} \delta\zeta_\lambda \,.\, \zeta_\mu^* + \Sigma \delta a_{\lambda\mu} \zeta_\lambda \zeta_\mu^*.$$

Da die beiden ersten Summen der rechten Seite nach Voraussetzung invariant sind, ist es auch die dritte, und man erhält daher den Satz:

IX. *Die Grössen $\delta a_{\lambda\mu}$ bezw. $\delta\beta_{\lambda\mu}$ sind den $a_{\lambda\mu}$ bezw. $\beta_{\lambda\mu}$ cogredient.*

§ 8. Es sei $\Sigma f_\lambda \xi_\lambda = 0$ irgend eine Identität, in der die ξ_λ unbestimmte Grössen sind. Dann ist auch $\Sigma f_\lambda \delta\xi_\lambda = 0$ und durch Differentiation der Identität folgt eine Gleichuug von der Form $\Sigma \delta f_\lambda \,.\, \xi_\lambda = 0$, so dass die Differentiation nach den ξ_λ einfach unterbleiben konnte.

Zum Beispiel folgt aus der Identität:

$$\sum_\mu {}^a z_\mu \zeta_\mu^* = \sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu} \zeta_\lambda \zeta_\mu^*$$

sofort:

$$\Sigma \delta^a z_\mu \zeta_\mu^* = \Sigma \delta a_{\lambda\mu} \zeta_\lambda \zeta_\mu^* + \Sigma a_{\lambda\mu} \delta\zeta_\lambda \zeta_\mu^*,$$

d. h.

$$\delta^a z_\mu = {}^{\delta a} z_\mu + {}^a\delta z_\mu,$$

wenn ${}^a\delta z_\mu$ aus den $\delta\zeta_\lambda$ ebenso gebildet ist, wie ${}^a z_\mu$ aus den ζ_λ.

Das Zeichen δ befolgt also, soweit diese Untersuchungen reichen, dieselben algebraischen Gesetze, wie das Zeichen d.

Es sollen daher mit entsprechenden Buchstaben des griechischen und lateinischen Alphabetes nur noch solche System ξ und x bezeichnet werden, zwischen denen die Relationen

$$\text{(A)} \qquad T\xi_\lambda = (-1)^l x_l$$

bestehen. Darin bedeutet λ, l eine Permutation von 1, 2.

Damit entstehen zugleich die Identitäten:

$$\text{(11)} \quad x_1\eta_1 + x_2\eta_2 = T^{-1}(x_1y_2 - y_1x_2) = T(\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2) = -(\xi_1y_1 + \xi_2y_2),$$

$$\text{(12)} \qquad \sum a_{\lambda\mu}\xi_\lambda\eta_\mu = \sum \mathfrak{a}_{l\mu}x_\lambda\eta_\mu = \sum \alpha_{lm}x_l y_m,$$

wenn in (12)

$$\text{(B)} \qquad T\mathfrak{a}_{l\mu} = a_{\lambda\mu}(-1)^l; \quad T^2\alpha_{lm} = a_{\lambda\mu}(-1)^{l+m}$$

gesetzt ist. Aus (B) folgt sofort weiter:

$$\text{(13)} \qquad \sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu}\beta_{\lambda\mu} = \sum \alpha_{lm}b_{lm};$$

und ist umgekehrt

$$\beta_{\lambda\mu} = \xi_\lambda\eta_\mu,$$

so folgt auch

$$b_{lm} = x_l y_m.$$

Ferner wird:

$$\text{(14)} \qquad \frac{1}{2}(A, \boldsymbol{A}) = Da = D\mathfrak{a} = D\alpha, \qquad M\mathfrak{A} = T^{-1}(a_{12} - a_{21}) = T(\alpha_{12} - \alpha_{21}).$$

§ 11. Da zu jedem System von Grössen ein contragredientes gehört, kann folgende Freiheit der Bezeichnung festgesetzt werden:

Dient ein Buchstabe zur abkürzungsweisen Bezeichnung eines Systems, so darf er auch zur Bezeichnung der durch (A) *oder* (B) *damit verbundenen Systeme verwandt werden.*

Bedeutet A das System $a_{\lambda\mu}$, $\boldsymbol{B}$ das System $\beta_{\lambda\mu}$, so können demnach die aequivalenten Ausdrücke (13) mit

$$(A, B), \ (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}), \ (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \text{ etc.}$$

bezeichnet werdet.

Für (12) kann ebenso

$$(A\,,\,xy),\ (A\,,\,\xi y),\ (\mathfrak{A}\,,\,\xi\eta)\ \text{etc.}$$

geschrieben werden, für die vier aequivalenten Ausdrücke (11) sowohl

$$(x\,,\,y),\ (x\,,\,\eta)\ \text{wie}\ (\xi\,,\,y)\ \text{oder}\ (\xi\,,\,\eta).$$

Es wird sich zeigen, dass von den durch (B) verbundenen Systemen immer das mit lateinischen Buchstaben bezeichnete gegeben ist, ausgenommen $\mathfrak{E}$. Von zwei durch (A) verknüpften kann ξ oder x gegeben sein. Das andere ist dann von T abhängig und ändert sich, wenn über T anderweitig verfügt wird. Wird T durch P ersetzt, so ist für ξ zu schreiben $\frac{T}{P}\xi$, wenn x gegeben, dagegen für x $\frac{P}{T}x$, wenn ξ gegeben ist.

§ 12. Die Abkürzungen $(A\,,\,B)$, $(x\,,\,y)$ befolgen nachstehende Relationen:

$$(15)\qquad \begin{cases} (A\,,\,B) = (B\,,\,A); & (A\,,\,A) = 2\,Da; \\ (x\,,\,y) = -(y\,,\,x); & (x\,,\,x) = 0; \\ (A\,,\,xy) = -({}^{*}A\,,\,yx) = ({}^{a}x\,,\,y) = (x\,,\,{}^{*a}y). \end{cases}$$

Die Form $(A\,,\,{}^{b}xy)$ soll auch mit $(AB\,,\,xy)$ bezeichnet werden. Nach (15) ist dann:

$$(16)\qquad (B\,,\,x^{a}y) = ({}^{b}x\,,\,{}^{a}y) = ({}^{*ab}x\,,\,y) = ({}^{*}AB\,,\,xy).$$

In § 3, (4) war gezeigt, dass

$$(16')\qquad M({}^{*}AB) = (A\,,\,B)$$

ist. Aus der Vertauschbarkeit von A mit B und aus

$$(17)\qquad (A\,,\,B) = ({}^{*}A\,,\,{}^{*}B), \qquad {}^{**}A = A$$

ergiebt sich übrigens:

$$(16'')\qquad M({}^{*}AB) = M({}^{*}BA) = M(B\,{}^{*}A) = M(A\,{}^{*}B).$$

Nach dem Multiplicationstheorem der Determinanten besteht zwischen vier Systemen $p_{(i)}\,,\,x_{(i)}$ $(i = 1\,,\,2)$ die Identität:

$$(18)\qquad |(p_{(i)}\,,\,r_{(k)})| = (p_{(1)}\,,\,p_{(2)})(r_{(1)}\,,\,r_{(2)}),$$

wofür auch geschrieben werden kann:

$$(18') \qquad (p_{(1)}, p_{(2)})(r, y) = (r, p_{(2)})(p_{(1)}, y) - (r, p_{(1)})(p_{(2)}, y).$$

Ist $(p_{(1)}, p_{(2)}) = 0$, so ist demnach

$$(p_{(1)}, x) = f \cdot (p_{(2)}, x),$$

wo f von x unabhängig ist.

So ergiebt sich aus $({}^a x, y) = -(x, {}^{*a}y)$, wenn x für y gesetzt wird:

$$({}^a x + {}^{*a}x, x) = 0,$$

d. h. nach dem eben bewiesenen:

$$({}^a x, y) + ({}^{*a}x, y) = f \cdot (x, y).$$

f ist von y und aus Symmetriegründen auch von x unabhängig. Durch einfaches Ausrechnen erkennt man $f = MA$ und mithin

$$(19) \qquad (A, xy) - (A, yx) = MA(x, y).$$

Nach (3) und (18) ist daher speciell

$$(20) \qquad M(pq) = (p, q)$$

und andererseits nach (16), wenn in (19) ${}^*AB$ für A gesetzt wird,

$$(21) \qquad ({}^a x, {}^b y) + ({}^b x, {}^a y) = (A, B)(x, y).$$

Setzt man $a = b$, so folgt

$$(21') \qquad ({}^a x, {}^a y) = Da(x, y).$$

Schreibt man daraufhin in (18) ${}^a p$ für p, so ergiebt sich:

$$(22) \qquad |(A, p_{(i)} r_{(k)})| = Da(p_{(1)}, p_{(2)})(r_{(1)}, r_{(2)}).$$

Diese Formel kann auch folgendermassen geschrieben werden:

$$(22') \qquad (A, pr)(A, xy) = Da(p, x)(r, y) - ({}^a p, y)({}^{*a}r, x).$$

Im Falle $Da = 0$ ist also die bilineare Form das Produkt zweier Linearfaktoren. Die Umkehrung folgt aus (22) wegen (3).

und ∂x die Relationen (A) *erfüllen* oder, was dasselbe besagt, dass für beliebige y

$$(\partial\xi, y) = (\partial x, y)$$

ist. Aus den Identitäten

$$\sum \xi_\lambda x_\lambda = 0, \qquad \sum a_{\lambda\mu}\xi_\lambda\xi_\mu = \sum \alpha_{\lambda\mu} x_\lambda x_\mu$$

folgt nämlich durch Differentiation:

$$\sum \partial\xi_\lambda x_\lambda = -\sum \xi_\lambda \partial x_\lambda \quad \text{oder} \quad (\partial\xi, x) = (\partial x, x)$$

und

$$\sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu}\xi_\lambda \partial\xi_\mu = \sum_{\lambda,\mu} \alpha_{\lambda\mu} x_\lambda \partial x_\mu \quad \text{oder} \quad (\partial\xi, {}^a x) = (\partial x, {}^a x).$$

Setzt man jetzt in (18′) für $p_{(1)}$ ${}^a x$, für $p_{(2)}$ x, für r einmal $\partial\xi$, einmal ∂x, so folgt, da $({}^a x, x)$ nicht *identisch* null ist:

$$(\partial\xi, y) = (\partial x, y),$$

w. z. b. w.

Aus (12) ergiebt sich damit durch Differentiation unmittelbar, *dass auch die Systeme $\partial\mathfrak{b}_{\lambda\mu}$, $\partial\beta_{\lambda\mu}$ und $\partial b_{\lambda\mu}$ durch* (B) *verknüpft sind.*

In der linearen Form

$$(\partial p, x)$$

sind die ∂p_λ linear von den du_λ abhängig. Es sei daher

$$(\partial p, x) = (P, x du)$$

gesetzt, worin

$$p_{\lambda\mu} = \frac{\partial p_\lambda}{\partial u_\mu} - \sum_\rho \begin{Bmatrix} \lambda\mu \\ \rho \end{Bmatrix} p_\rho.$$

Hiernach und nach (19) ist

$$(\partial_2 p, d_1 u) - (\partial_1 p, d_2 u) = MP(d_1 u, d_2 u) \quad \text{und} \quad MP = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial p_1}{\partial u_2} - \frac{\partial p_2}{\partial u_1}\right).$$

P ist also dann und nur dann eine symmetrische Form, wenn (p, du) ein exaktes Differential ist. Als Invariante der Form p sei daher MP auch mit

$$Ip$$

bezeichnet, weil $Ip = 0$ die Integrabilitätsbedingung von p ist.

Ist φ eine Funktion von u_1 und u_2, so ist

$$(24) \qquad I(\varphi p) = \varphi . Ip + \left(p, \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right).$$

§ 15. Man kann die Frage aufwerfen, ob zwei Operationen δ_1 und δ_2 vertauschbar sind. Sie ist zu verneinen. Sicher ist jedenfalls, dass in den Ausdrücken

$$\delta_2 \delta_1 \xi_\lambda - \delta_1 \delta_2 \xi_\lambda$$

die zweiten Differentiale der ξ sich wegheben. Führt man aber in der Identität

$$d_1 d_2 (x, y) = d_2 d_1 (x, y)$$

die Differentiation mittelst der δ aus, so bleibt

$$(25'') \qquad (\delta_2 \delta_1 x - \delta_1 \delta_2 x, y) = (\delta_2 \delta_1 y - \delta_1 \delta_2 y, x),$$

woraus folgt, dass $\delta_2 \delta_1 x - \delta_1 \delta_2 x$ auch die ersten Differentiale der x nicht enthält, mithin trilinear in $x, d_1 u$ und $d_2 u$ ist. Das gleiche ergiebt sich aus der Identität

$$d_2 d_1 (A, xy) = d_1 d_2 (A, xy),$$

die zu

$$(25''') \qquad \big(A, (\delta_2 \delta_1 x - \delta_1 \delta_2 x) y\big) = -\big(A, (\delta_2 \delta_1 y - \delta_1 \delta_2 y) x\big)$$

wird. Die linke Seite dieser Gleichung ist eine bilineare Form in x, y, etwa (C, xy), und die letzte Gleichung sagt aus, dass

$$(C, xy) = -(C, yx),$$

also nach (19)

$$(C, xy) = f . (x, y)$$

ist. Offenbar ist f wieder bilinear und alternierend in $d_1 u, d_2 u$,

$$f = K_a . (d_1 u, d_2 u),$$

und K_a hängt nur noch von den Coefficienten von A ab. Man bezeichnet K_a als die *Gauss'sche Invariante* oder in Rücksicht auf ihre geometrische Bedeutung nach Bianchi kürzer als *Krümmung* von A. Nur wenn sie

null ist, ist identisch $\partial_1\partial_2 = \partial_2\partial_1$. Die beiden Identitäten (25'') und (25''') können jetzt durch

$$(25') \qquad (\partial_2\partial_1 x - \partial_1\partial_2 x, y) = -K_a.(A, xy)(d_1 u, d_2 u),$$

$$(25) \qquad (A, (\partial_2\partial_1 x - \partial_1\partial_2 x)y) = \quad K_a(x, y)(d_1 u, d_2 u)$$

ersetzt werden.

Man gelangt zu K_a noch auf einem zweiten Weg, der zugleich erkennen lässt, dass K_a nur für specielle Formen verschwindet. Es sei (A, xx) in lineare Faktoren zerlegt:

$$(26) \qquad (A, xx) = (a_{(1)}, x)(a_{(2)}, x).$$

Schreibt man $x + \lambda y$ für x und vergleicht die Coefficienten von λ, so kommt:

$$(26') \qquad 2(A, xy) = (a_{(1)}, x)(a_{(2)}, y) + (a_{(2)}, x)(a_{(1)}, y).$$

Nach (22) ist

$$|(A, a_{(i)}a_{(k)})| = (a_{(1)}, a_{(2)})^2, \qquad (i, k = 1, 2)$$

und durch Ausrechnen der linken Seite nach (26) und (26') folgt

$$(a_{(1)}, a_{(2)})^2 = -4, \qquad (a_{(1)}, a_{(2)}) = 2i,$$

wobei i eine zweite Wurzel aus -1.

Differenziert man (26), so fallen nach (26') die mit ∂x behafteten Glieder fort und es bleibt

$$(\partial a_{(1)}, x)(a_{(2)}, x) + (\partial a_{(2)}, x)(a_{(1)}, x) = 0.$$

Also muss $(\partial a_{(i)}, x)$ durch $(a_{(i)}, x)$ teilbar sein. Der Quotient ist eine lineare Form der du, mithin

$$(27) \qquad (\partial a_{(1)}, x) = (a_{(1)}, x)(p, du); \qquad (\partial a_{(2)}, x) = -(a_{(2)}, x)(p, du).$$

Es sei (A, xx) auf irgend eine andere Weise in zwei Faktoren $b_{(1)}$ und $b_{(2)}$ zerlegt. Bei passender Bezeichnung ist dann:

$$(b_{(1)}, x) = (a_{(1)}, x)e^{\varphi}, \qquad b_{(2)}x = (a_{(2)}, x)e^{-\varphi}$$

und andererseits

$$(\partial b_{(1)}, x) = (b_{(1)}, x)(q, du).$$

Nach der ersten Beziehung ist aber

$$(\partial b_{(1)}, x) = d(b_{(1)}, x) - (b_{(1)}, \partial x) = e^{\varphi}[(\partial a_{(1)}, x) + d\varphi . (a_{(1)}, x)],$$

d. h. nach (27)

$$= (b_{(1)}, x)[(p, du) + d\varphi],$$

also

$$(q, du) = (p, du) + d\varphi.$$

Ist also A und p gegeben, so findet man $a_{(1)}$ und $a_{(2)}$ durch eine Quadratur.

Offenbar darf aber p nicht willkührlich gewählt sein. Notwendig und hinreichend dafür, dass $d\varphi = (q, du) - (p, du)$ ein exaktes Differential ist, ist die Integrabilitätsbedingung:

$$Ip = Iq.$$

Ip ist also eine Invariante von A, da es von der Wahl der Faktorenzerlegung unabhängig ist.

Durch Differentiation folgt aus der ersten der Gleichungen (27), da sich die mit ∂x behafteten Glieder wegheben und $\partial a_{(1)}$ durch $a_{(1)}$ ausgedrückt werden kann:

$$(\partial_2 \partial_1 a_{(1)}, x) = (a_{(1)}, x)[(p, d_1 u)(p, d_2 u) + (p, \partial_2 d_1 u) + (\partial_2 p, d_1 u)],$$

also

$$(\partial_2 \partial_1 a_{(1)} - \partial_1 \partial_2 a_{(1)}, x) = (a_{(1)}, x)[(P, d_1 u\, d_2 u) - (P, d_2 u\, d_1 u)]$$
$$= Ip(a_{(1)}, x)(d_1 u, d_2 u).$$

Die linke Seite ist nach (25′) gleich $-K_a(A, a_{(1)} x)(d_1 u, d_2 u)$ und $(A, a_{(1)} x)$ nach (26′) gleich $-i(a_{(1)} x)$. Demnach bleibt

$$Ip = iK_a.$$

§ 16. Nach (20) ist $(p, a_{(1)}) = -Ia_{(1)}$ und ebenso $(p, a_{(2)}) = +Ia_{(2)}$. Damit wird nach (18′):

$$2i(p, x) = Ia_{(1)}(a_{(2)}, x) + Ia_{(2)}(a_{(1)}, x).$$

Sind also $(a_{(1)}, du)$ und $(a_{(2)}, du)$ exakte Differentiale, so ist p und damit $K_a = 0$. Und umgekehrt, ist $K_a = 0$, so darf $p = 0$ gewählt werden, und es existieren zwei Linearfaktoren, die der Bedingung

$$Ia_{(1)} \cdot a_{(2)} + Ia_{(2)} \cdot a_{(1)} = 0$$

genügen, aus der $Ia_{(1)} = Ia_{(2)} = 0$ folgt. Man erhält damit den bekannten Satz:

X. *Die Krümmung einer Form A verschwindet dann und nur dann, wenn diese Form das Produkt zweier exakten Differentiale ist.*

Um das Auftreten des Imaginären zu vermeiden, setze man:

$$a_{(1)} = p_{(1)} - ip_{(2)}, \qquad a_{(2)} = p_{(1)} + ip_{(2)}, \qquad p = ip_{(3)}.$$

Dadurch wird

(28) $\quad (A, xy) = (p_{(1)}, x)(p_{(1)}, y) + (p_{(2)}, x)(p_{(2)}, y), \qquad (p_{(1)}, p_{(2)}) = 1,$

(28′) $\quad (\partial p_{(1)}, x) = (p_{(2)}, x)(p_{(3)}, du), \qquad (\partial p_{(2)}, x) = -(p_{(1)}, x)(p_{(3)}, du),$

(28″) $\quad Ip_{(1)} = (p_{(2)}, p_{(3)}), \qquad Ip_{(2)} = (p_{(3)}, p_{(1)}), \qquad Ip_{(3)} = K_a.$

Es gilt also folgender Satz:

XI. *Ist $Da = 1$, $p_{(3)}$ eine lineare Form und $Ip_{(3)} = K_a$, so existieren Paare $p_{(1)}, p_{(2)}$ von linearen Formen, welche folgende Relationen erfüllen:*

$$A = p_{(1)}^2 + p_{(2)}^2, \qquad (p_{(1)}, p_{(2)}) = 1, \qquad Ip_{(1)} = (p_{(2)}, p_{(3)}), \qquad Ip_{(2)} = (p_{(3)}, p_{(1)}),$$

und alle diese Paare lassen sich durch eine Quadratur bestimmen.

In den Gleichungen (28″) ist eine Beziehung auf A nur durch das im Nenner stehende T enthalten. Schreibt man in der dritten noch $(p_{(1)}, p_{(2)})K$ für K_a, so gelten alle drei unabhängig davon, welches T zur Bildung der Invarianten benutzt wird. Daher kann man weiterhin folgenden Satz aussprechen:

XII. *Die drei Gleichungen*

(C) $\quad Ip_{(1)} = (p_{(2)}, p_{(3)}); \qquad Ip_{(2)} = (p_{(3)}, p_{(1)}); \qquad Ip_{(3)} = K(p_{(1)}, p_{(2)})$

sagen aus, dass die Form $p_{(1)}^2 + p_{(2)}^2$ die Krümmung K besitzt.

§ 17. Ist $DA = 1$, so ist nach (28):

$$(p_{(1)}, p_{(2)})^2 = 1,$$

also bei passender Bezeichnung

$$(p_{(1)}, p_{(2)}) = 1.$$

Damit wird

$$(A, p_{(1)}x) = -(p_{(2)}, x),$$

$$(A, p_{(1)}p_{(1)}) = 1.$$

Die letztere Bedingung ist nach (23') hinreichend dafür, dass $A - p_{(1)}^2$ ein vollständiges Quadrat wird. Die Form

$$(29) \qquad (p_{(1)}, x) = \frac{(z, x)}{\sqrt{(A, zz)}}$$

genügt ihr identisch, wenn z eine beliebige lineare Form, nur kein Teiler von A ist. Ist $\bar{z}$ von z linear abhängig, also $\bar{z} = f.z$, so ist

$$\frac{(\bar{z}, x)}{\sqrt{(A, \bar{z}\bar{z})}} = \frac{(z, x)}{\sqrt{(A, zz)}}.$$

Durchläuft also z alle linearen, von einander unabhängigen Formen, ausschliesslich der beiden Teiler von A, so ergiebt (29) alle Formen $p_{(1)}$, für die $(A, p_{(1)}p_{(1)}) = 1$ ist, und jede nur einmal. Aus (29) folgt weiter:

$$(29') \qquad (p_{(2)}, x) = -(A, p_{(1)}x) = -(A, zz)^{-\frac{1}{2}}(A, zx).$$

Durch Differentiation folgt weiter aus $(p_{(1)}, z) = 0$:

$$(\partial p_{(1)}, z) = (\partial z, p_{(1)}) = (A, zz)^{-\frac{1}{2}}(\partial z, z).$$

Nun ist $(\partial p_{(1)}, z) = (p_{(2)}, z)(p_{(3)}, du)$ und $(p_{(2)}, z)$ nach (28') gleich $-(A, zz)^{\frac{1}{2}}$. Schreibt man noch x für du, so folgt:

$$(29'') \qquad (p_{(3)}, x) = -(A, zz)^{-1}(Z, zx).$$

Die Ausdrücke (29 bis 29'') erfüllen also die Gleichungen (28 bis 28'') identisch. Sie enthalten drei verschiedene Linearformen, nämlich z, ${}^az$ und

'z. Will man ausser z nur noch *eine*, zunächst willkührliche Form r benutzen, so hat man (18') anzuwenden und erhält:

$$(29'') \quad \begin{cases} (p_{(2)}, x) \cdot \sqrt{(A, zz)}(z, r) = -(A, zr)(z, x) + (A, zz)(r, x), \\ (p_{(3)}, x) \cdot (A, zz)(z, r) = -(Z, zr)(z, x) + (Z, zz)(r, x). \end{cases}$$

V.

§ 18. Wenn die lineare Form (p, du) ein exaktes Differential dp ist, so nennt man ihre Invarianten mit A »Differentialparameter von p». Für einige derselben hat man besondere Bezeichnungen eingeführt, und zwar:

$$(A, pp) = \Delta_1 p; \qquad (A, P) = \Delta_2 p; \qquad \frac{1}{2}(P, P) = \Delta_{22} p.$$ [1]

In Analogie hierzu kann man noch

$$(P, pp) = \Delta_{12} p$$

setzen. Es ist dies dieselbe Invariante, die Hr. WEINGARTEN in der Preisschrift[2] mit Ip bezeichnet hat.

Ist gleichzeitig $(q, du) = dq$, so setzt man noch

$$(A, pq) = \Delta(p, q);^{3} \qquad (p, q) = \theta(p, q).^{4}$$

Nach (22) ist

$$(30) \qquad \Delta_1 p \Delta_1 q - \Delta^2(p, q) = \theta^2(p, q).$$

Für $\Delta_2 p$ hat man die Darstellung

$$\Delta_2 p = \frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial u_2}\left[\frac{1}{T}\left(a_{11}\frac{\partial p}{\partial u_2} - a_{12}\frac{\partial p}{\partial u_1}\right)\right] - \frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial u_1}\left[\frac{1}{T}\left(a_{12}\frac{\partial p}{\partial u_2} - a_{22}\frac{\partial p}{\partial u_1}\right)\right].$$

Dieselbe ergiebt sich aus unsern Entwicklungen folgendermassen:

---

[1] Bei DARBOUX $-\sigma p$, bei WEINGARTEN, *Preisschrift*, θp.

[2] pag. 20, Gleich. 15.

[3] Bei den Italienischen Mathematikern $\nabla(p, q)$.

[4] DARBOUX, l. c.

Es ist $\partial^a p = {}^a\partial p$, also

$$(\partial^a p, x) = (\partial p, {}^{*a}x) = (P^* A, x du)$$

und damit nach (16')

$$I({}^a p) = M(P^* A) = (A, P),$$

w. z. b. w.

Für $\Delta_{22} p$ giebt Bianchi [1] ohne Beweis die Formel

(31) $$4\Delta_{22} p \Delta_1 p = 2\Delta_2 p \Delta(p, \Delta_1 p) - \Delta_1 \Delta_1 p.$$

Man hat aber

$$d(A, pp) = 2(A, p\partial p) = -2(\partial p, {}^* p) = -2(P, {}^* p du).$$

Setzt man für du $p, {}^a p$ oder ${}^p p$, so folgt:

(32') $$\left(\frac{\partial}{\partial u}(A, pp), p\right) = -2(P, {}^a pp),$$

(32'') $$\left(A, \frac{\partial}{\partial u}(A, pp) p\right) = 2(P, {}^a p {}^a p),$$

(32''') $$\left(P, p\frac{\partial}{\partial u}(A, pp)\right) = 2(P, {}^a p {}^p p) = 2({}^{pa} p, {}^p p) = (P, P)(A, pp).$$

Aus (32'') folgt zunächst nach (23)

(32) $$\frac{1}{2}\Delta(p, \Delta_1 p) = \Delta_1 p \Delta_2 p - \Delta_{12} p.$$

Ferner hat man nach (22), da P eine symmetrische Form ist,

$$(P, {}^a p {}^a p)(P, pp) - (P, {}^a pp)^2 = (A, pp)^2 \frac{1}{2}(P, P),$$

oder nach (32'') und (32')

$$\frac{1}{2}\Delta(p, \Delta_1 p)\Delta_{12} p - \frac{1}{4}\theta^2(p, \Delta_1 p) = \Delta_1^2 p \cdot \Delta_{22} p.$$

Hierin hat man nur θ und Δ_{12} nach (30) und (32) auszudrücken, um (31) zu erhalten.

Unter der Annahme $(p, du) = dp$ lautet noch (32'''):

$$\left(P, \frac{\partial p}{\partial u} \cdot \frac{\partial \Delta_1 p}{\partial u}\right) = 2\Delta_{22} p \Delta_1 p$$

[1] *Lezioni di geometria differenziale,* Kap. II, Gleich. (26*).

und, wenn man die linke Seite ausschreibt,

$$(33)\qquad 2\Delta_{22}p\Delta_1 p$$
$$= \frac{1}{T^2}\left[p_{11}\frac{\partial p}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial\Delta_1 p}{\partial u_2} - p_{12}\left(\frac{\partial p}{\partial u_1}\frac{\partial\Delta_1 p}{\partial u_2} + \frac{\partial p}{\partial u_2}\frac{\partial\Delta_1 p}{\partial u_1}\right) + p_{22}\frac{\partial p}{\partial u_1}\frac{\partial\Delta_1 p}{\partial u_1}\right].$$

Diese Formel scheint bisher noch nicht angegeben worden zu sein.

§ 19. In den Ausdrücken (29—29‴) hatte z die Repräsentanten der Classen abhängiger linearer Formen zu durchlaufen, ausschliesslich der beiden Teiler von A. Diese Beschränkung bedarf kaum der Erwähnung, weil in diesem Falle die Formeln durch das Verschwinden von (A, zz) bedeutungslos werden.

Man kann aber als Repräsentant irgend einer Klasse linear abhängiger Formen stets ein exaktes Differential wählen und demnach z alle reelle linear unabhängigen Differentiale dz durchlaufen lassen. Dabei durchläuft z selbst alle von einander unabhängige Funktionen zweier Variabeln; r sollte irgend eine von z unabhängige Covariante von z sein. Setzen wir fest, dass r ein exaktes Differential $d\sigma$ ist, so ist σ eine von z unabhängige Invariante von z. Die einfachste Invariante von z ist $\Delta_1 z$. Wählen wir daher, vorausgesetzt, dass $\Delta_1 z$ keine Funktion von z allein ist, $(r, du) = d\Delta_1 z$, so gehen die Formeln (29) und (29‴) unter Beachtung von (32‴) über in folgende:

$$(\mathrm{D})\qquad \begin{cases} (p_{(1)}, du) = \dfrac{dz}{\sqrt{\Delta_1 z}}, \\[2ex] (p_{(2)}, du) = \dfrac{-\Delta(z, \Delta_1 z)\,dz + \Delta_1 z\, d\Delta_1 z}{\theta(z, \Delta_1 z)\cdot\sqrt{\Delta_1 z}}, \\[2ex] (p_{(3)}, du) = \dfrac{-2\Delta_{22} z\,\Delta_1 z\,dz + \Delta_{12} z\, d\Delta_1 z}{\theta(z, \Delta_1 z)\cdot\Delta_1 z}. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke werden auch dann bedeutungslos, wenn $\Delta_1 z$ eine Funktion von z allein ist, d. h. sie stellen alle Formen p_1, p_2, p_3 dar, die den Relationen (28 bis 28″) genügen, ausgeschlossen den Fall, dass (p_1, du) ein exaktes Differential ist.

Aus den Sätzen X und XI folgt nun, dass man alle Tripel von Formen, die die Bedingungen (C) erfüllen, herstellen kann, indem man sich alle Formen der Krümmung K angeschrieben denkt und sie in all-

gemeinster Weise als Summen zweier Quadrate, $p_{(1)}^2 + p_{(2)}^2$, darstellt, wobei $(p_{(1)}, p_{(2)}) = 1$ zu nehmen ist. Dann genügen nämlich $p_{(1)}, p_{(2)}$ und

$$p_{(3)} = -Ip_{(1)} \cdot p_{(1)} - Ip_{(2)} \cdot p_{(2)}$$

den Relationen (C).

Die Formen der Krümmung K ordnen sich aber in Schaaren äquivalenter Formen, d. h. solcher Formen, die durch Transformation der Veränderlichen in einander übergehen. Zu jeder solchen Schaar gehört die Gruppe der Substitutionen, die die Formen der Schaar und damit die zugehörigen Tripel $p_{(1)}, p_{(2)}, p_{(3)}$ in einander überführen. Infolge ihrer Invarianz stellen mithin (unter der Beschränkung $Ip_{(1)} \gtrless 0$) die Gleichungen (D) sämtliche zu einer Schaar gehörigen Tripel $p_{(1)}, p_{(2)}, p_{(3)}$ dar.

Hier tritt nun ein wesentlicher Unterschied zwischen dem Falle eines veränderlichen und eines constanten K auf. Im ersten Fall giebt es unter den Formen der Krümmung K unendlich viele Schaaren, aus jeder Klasse (d. h. Gesamtheit äquivalenter Formen) ausschliesslich der Klassen constanter Krümmung eine, und die zu einer solchen Schaar gehörige Substitutionengruppe umfasst niemals die Gesamtheit aller Substitutionen.

Ist dagegen K eine Constante, so besteht die Gesamtheit aller Formen der Krümmung K aus einer einzigen Schaar, da diese Formen eine Klasse bilden. Die zugehörige Substitutionsgruppe umfasst daher alle Substitutionen. *Im Falle $K = const.$, und nur in diesem, stellen also die Formeln* (D) *alle Formen dar, welche die Relationen* (C) *und* $Ip_{(1)} \gtrless 0$ *erfüllen.*

VI.

§ 20. In dem singulären Fall $Ip_{(1)} = 0$ muss sich naturgemäss der gleiche Unterschied zwischen veränderlichem und constantem K geltend machen. Befriedigt man durch den Ansatz

$$(34) \qquad (p_{(1)}, du) = dp, \qquad (p_{(2)}, du) = \lambda dt, \qquad (p_{(3)}, du) = \mu dt$$

die Gleichung $Ip_{(1)} = (p_{(2)}, p_{(3)}) = 0$ identisch, so folgt aus den beiden andern

$$\theta(t, \lambda) = \mu\theta(t, p); \qquad \theta(t, \mu) = -\lambda K\theta(t, p).$$

Also sind t, p unabhängige Funktionen. Führt man sie als neue Variable ein, so folgt:

$$(34') \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial p} = \mu, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial p} = -K\lambda,$$

also:

$$(35) \qquad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2} + K\lambda = 0.$$

Ist K nicht constant, so ist es als Funktion von u_1, u_2 gegeben. Wählt man für λ irgend eine Funktion von p und t, nur so, dass $\frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2}$ nicht constant ist, so ist (35) eine Beziehung zwischen p, t und u_1, u_2. Bestimmt man noch p, t als Funktionen von u_1, u_2 so, dass diese Beziehung identisch erfüllt ist, so sind die Formen (34) für $\mu = \frac{\partial \lambda}{\partial p}$ den Relationen (C) unterworfen.

Ist dagegen K eine Constante, so ist (35) eine Differentialgleichung für λ, und es folgt aus ihr, wenn $K \gtrless 0$:

$$\lambda = a \cos kp + b \sin kp, \quad \text{wo} \quad k = \sqrt{K},$$

und a und b von t abhängen können. Jenachdem $a^2 + b^2 \gtrless 0$ oder $= 0$ ist, kann $\lambda = f(t) \cos k(p - p_0)$ oder $\lambda = f(t) e^{ikp}$ gesetzt werden. Indem noch für $\int f(t)dt$ t geschrieben und (34') beachtet wird, erhält man folgende identische Darstellung der Formen $p_{(1)}, p_{(2)}, p_{(3)}$ im Falle $K = \text{const.} \gtrless 0$, $Ip_{(1)} = 0$:

$$(D') \begin{cases} p_{(1)} = dp, \quad p_{(2)} = \cos k(p - p_0) . dt, \quad p_{(3)} = -k \sin k(p - p_0) . dt, \\ \qquad\qquad p_0 = p_0(t), \\ \text{oder} \\ p_{(1)} = dp, \quad p_{(2)} = e^{ikp}\, dt, \quad p_{(3)} = ike^{ikp}\, dt, \quad i = \pm\sqrt{-1}. \end{cases}$$

Der Fall $K = 0$ bietet keine principiellen Schwierigkeiten. Der Vollständigkeit wegen sei angeführt, dass entweder

$$p_{(1)} = dp, \quad p_{(2)} = (p - f(t))dt, \quad p_{(3)} = dt,$$

oder

$$p_{(1)} = dp, \quad p_{(2)} = dt, \quad p_{(3)} = 0 \text{ ist.}$$

VII.

§ 21. Die Relationen (C) treten bei der Betrachtung orthogonaler Systeme, die von zwei oder mehr Veränderlichen abhängen, wieder auf. Sei $(X_i^{(\lambda)})$ ein orthogonales System. Componiert man es mit dem System seiner Differentiale, $(dX_i^{(\lambda)})$, so erhält man die unendlich kleinen Grössen

$$\rho_{ik} = \sum_\lambda dX_i^{(\lambda)} X_k^{(\lambda)}.$$

Infolge der Orthogonalitätsbedingungen

$$\sum_k X_k^{(\lambda)} X_k^{(\mu)} = e_{\lambda\mu}$$

ist

(36) $$dX_i^{(\lambda)} = \sum_k \rho_{ik} X_k^{(\lambda)},$$

und aus der anderen Reihe,

$$\sum_\lambda X_i^{(\lambda)} X_k^{(\lambda)} = e_{ik},$$

folgt durch Differenzieren:

(37) $$\rho_{ik} + \rho_{ki} = 0.$$

Es bietet sich auf verschiedenen Gebieten die Aufgabe, wenn die ρ_{ik} (als lineare Formen der Differentiale der Variabeln) gegeben sind, die $X_i^{(\lambda)}$ aus den Differentialgleichungen (36) zu bestimmen. Dabei gilt der Satz:

XIII. *Giebt es ein orthogonales System, welches den Gleichungen* (36) *genügt, so giebt es für jedes (orthogonale) System von Anfangswerthen ein solches und nur eines.*

Genügt nämlich das System $(Y_i^{(\lambda)})$ den Gleichungen (36), so folgt für die Grössen $X_i^{(\lambda)} = \sum_\mu \alpha_{\lambda\mu} Y_i^{(\mu)}$, wenn die $\alpha_{\lambda\mu}$ constant sind:

$$dX_i^{(\lambda)} = \sum_\mu \alpha_{\lambda\mu} dY_i^{(\mu)} = \sum_{\mu,k} \alpha_{\lambda\mu}\rho_{ik} Y_k^{(\mu)} = \sum_k \rho_{ik} X_k^{(\lambda)},$$

und wenn umgekehrt die Systeme $(X_i^{(\lambda)})$ und $(Y_i^{(\lambda)})$ beide (36) erfüllen, so ist:

$$\sum_i (X_i^{(\lambda)} dY_i^{(\mu)} + dX_i^{(\lambda)} Y_i^{(\mu)}) = \sum_{i,k} \rho_{ik} X_i^{(\lambda)} Y_k^{(\mu)} + \sum_{i,k} \rho_{ik} X_k^{(\lambda)} Y_i^{(\mu)} = 0,$$

also

$$\sum_i X_i^{(\lambda)} Y_i^{(\mu)} = \alpha_{\lambda\mu},$$

wo $\alpha_{\lambda\mu}$ constant ist. Da das System $(\alpha_{\lambda\mu})$ aus den orthogonalen $(X_i^{(\lambda)})$ und $(Y_i^{(\lambda)})$ zusammengesetzt ist, ist es selbst orthogonal. *Somit erhält man aus einem particulären Integral von* (36) *das allgemeine durch Composition mit einem willkürlichen constanten Orthogonalsystem.* Damit ist Satz XIII ausgesprochen.

§ 22. Wenn das System $X_i^{(\lambda)}$ von zwei unabhängigen Variabeln u_1, u_2 abhängt, so erfordert das Bestehen der Gleichungen (36) das Erfülltsein der Integrabilitätsbedingungen für die $dX_i^{(\lambda)}$. Die ρ_{ik} sollen als lineare Formen der du_λ mit $(r_{(ik)}, du)$ bezeichnet werden. Dann ist

$$\sum_k I(X_k^{(\lambda)} r_{(ik)}) = \sum_k X_k^{(\lambda)} I r_{(ik)} + \sum_k \left(r_{(ik)}, \frac{\partial}{\partial u} X_k^{(\lambda)}\right)$$
$$= \sum_k X_k^{(\lambda)} \{I r_{(ik)} + \sum_l (r_{(il)}, r_{(lk)})\} = 0,$$

d. h.

$$I r_{(ik)} + \sum_l (r_{(il)}, r_{(lk)}) = 0.$$

Die Betrachtung werde jetzt auf ein dreireihiges Orthogonalsystem beschränkt und

(37′) $r_{(23)} = -r_{(32)} = r_{(1)}, \qquad r_{(31)} = -r_{(13)} = r_{(2)}, \qquad r_{(12)} = -r_{(21)} = r_{(3)}$

gesetzt. Dadurch werden die Integrabilitätsbedingungen zu

(C*) $I r_{(1)} = (r_{(2)}, r_{(3)}); \qquad I r_{(2)} = (r_{(3)}, r_{(1)}); \qquad I r_{(3)} = (r_{(1)}, r_{(2)}).$

Sind die beiden Seiten der drei Gleichungen für sich null, so lassen sich die Gleichungen (36) auf den Fall einer unabhängigen Veränderlichen zurückführen und sind dann, wie später zu zeigen ist, stets integrabel.

Unter Ausschluss dieses Falles werde angenommen, dass $(r_{(2)}, r_{(3)})$ nicht null sei. *Dann ist* $r_{(1)}$ *vermittelst der beiden letzten der Gleichungen* (C*) *nach* (18′) *durch* $r_{(2)}, r_{(3)}$ *eindeutig bestimmt.*

Existiert also ein orthogonales System, welches die beiden Gleichungen

(36′) $-\sum_\lambda X_3^{(\lambda)} dX_1^{(\lambda)} = (r_{(2)}, du), \qquad \sum_\lambda X^{(\lambda)} dX_1^{(\lambda)} = (r_{(3)}, du)$

erfüllt, so ist auch

(36″) $$\sum_\lambda X_3^{(\lambda)} dX_2^{(\lambda)} = (r_{(1)}, du)$$

und damit allgemein (36) befriedigt.

Setzt man aber $r_{(3)} = -p_{(1)}$, $r_{(2)} = p_{(2)}$, $r_{(1)} = p_{(3)}$, so sagen die Gleichungen (C^*) nach Satz XII aus, dass die quadratische Form $r_{(2)}^2 + r_{(3)}^2$ die Krümmung 1 besitzt. Nach einem Satz des Hrn. Weingarten[1] existieren also drei Funktionen $X_1^{(1)}$, $X_1^{(2)}$, $X_1^{(3)}$ welche die beiden Bedingungen

(38) $$\sum_\lambda X_1^{(\lambda)} X_1^{(\lambda)} = 1,$$

(39) $$\sum_\lambda dX_1^{(\lambda)} dX_1^{(\lambda)} = (r_{(2)}, du)^2 + (r_{(3)}, du)^2$$

erfüllen. Infolge der Unabhängigkeit von $r_{(2)}$ und $r_{(3)}$ kann man aber

(40) $$dX_1^{(\lambda)} = X_2^{(\lambda)}(r_{(3)}, du) - X_3^{(\lambda)}(r_{(2)}, du)$$

setzen, wobei nach (18′)

(40′) $$X_2^{(\lambda)} : X_3^{(\lambda)} : 1 = \left(\frac{\partial X_1^{(\lambda)}}{\partial u}, r_{(2)}\right) : \left(\frac{\partial X_1^{(\lambda)}}{\partial u}, r_{(3)}\right) : (r_{(3)}, r_{(2)}).$$

Die so definierten Grössen $X_2^{(\lambda)}$, $X_3^{(\lambda)}$ erfüllen mit $X_1^{(\lambda)}$ identisch die Orthogonalitätsbedingungen, wie man z. B. erkennt, wenn man (40) auf (39) und die aus (38) folgende Gleichung $\sum_\lambda X_1^{(\lambda)} dX_1^{(\lambda)} = 0$ anwendet und beachtet, dass die Coefficienten der $r_{(i)}$ einzeln verschwinden müssen.

Aus (40) ergiebt sich dann aber unmittelbar (36′), also genügt dieses System den Gleichungen (36), d. h.:

XIV. *Die Bedingungen* (C^*) *sind notwendig und hinreichend für die Existenz orthogonaler Systeme, die den Gleichungen* (36) *genügen.*

§ 23. Die Bestimmung der Grössen $X_1^{(\lambda)}$ erfordert nach dem erwähnten Satz des Hrn. Weingarten die Integration zweier gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Man kann dies noch auf andere Weise erkennen. Die Differential-

---

[1] Crelles Journal, Bd. 94 und 95.

gleichungen (36) lauten ausgeschrieben, unter Weglassung des oberen Index:

$$dX_1 = (r_{(3)}, du)X_2 - (r_{(2)}, du)X_3;$$
$$dX_2 = (r_{(1)}, du)X_3 - (r_{(3)}, du)X_1;$$
$$dX_3 = (r_{(2)}, du)X_1 - (r_{(1)}, du)X_2.$$

Setzt man, um die Gleichung $\Sigma X_i^2 = 1$ identisch zu befriedigen,

$$X_1 = \frac{x+y}{x-y}, \qquad X_2 = \frac{1-xy}{x-y}, \qquad X_3 = \frac{1+xy}{i(x-y)},$$

so erhält man nach einiger Rechnung statt der drei angeschriebenen Gleichungen die eine Riccatische, der x und y genügen:

$$(41) \qquad dx = \frac{i}{2}\{(r_{(2)} - ir_{(3)}, du) + 2(r_{(1)}, du)x - (r_{(2)} + ir_{(3)}, du)x^2\}.$$

Hängen die $r_{(i)}$ nur von einer Variabeln ab, so sind für die Integrabilität von (41) keine weiteren Bedingungen erforderlich. Im Falle zweier unabhängiger Veränderlichen zerfällt die Gleichung in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen nach je einer der Variabeln, und diese kann man (als Riccatische) leicht in bekannter Weise auf lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung zurückführen.

§ 24. Bezeichnet man die Form $r_{(2)}^2 + r_{(3)}^2$ mit G_1 und wählt T so, dass $(r_{(2)}, r_{(3)}) = 1$ wird, so ist $(G_1, xr_{(3)}) = (r_{(2)}, x)$, also nach (40′) auch $X_2^{(\lambda)} = \left(G_1, \frac{\partial X_1^{(\lambda)}}{\partial u} r_{(3)}\right)$. Führt man also mittelst der Formeln (D)

$$r_{(3)} = -p_{(1)} = -\frac{dz}{\sqrt{\Delta_1 z}}$$

ein, so wird nach (40′) und (D):

$$(E) \qquad \begin{cases} X_2^{(\lambda)} = -\dfrac{\Delta(z, X_1^{(\lambda)})}{\sqrt{\Delta_1 z}}, \qquad X_3^{(\lambda)} = -\dfrac{\theta(z, X_1^{(\lambda)})}{\sqrt{\Delta_1 z}}; \\ r_{(3)} = -\dfrac{dz}{\sqrt{\Delta_1 z}}, \\ r_{(2)} = \dfrac{-\Delta(z, \Delta_1 z)dz + \Delta_1 z\, d\Delta_1 z}{\theta(z, \Delta_1 z)\sqrt{\Delta_1 z}}, \\ r_{(1)} = \dfrac{-2\Delta_{22} z \Delta_1 z dz + \Delta_{12} z\, d\Delta_1 z}{\theta(z, \Delta_1 z) \cdot \Delta_1 z}, \end{cases}$$

also

$$(43') \qquad \sum_i (A\,,\, a_{(i)}p)(A\,,\, a_{(i)}q) = (A\,,\, pq).$$

Mit (42) folgt aus (43) für ein beliebiges h:

$$(44) \qquad \sum_i [(A\,,\, a_{(i)}p) + h\,.\,\alpha_i](a_{(i)}\,,\, x) = (p\,,\, x),$$

und dies ist die allgemeinste Darstellung von p durch $a_{(1)}\,,\, a_{(2)}\,,\, a_{(3)}$.

§ 26. Ist nun A speciell als Summe der Quadrate dreier exakten Differentiale

$$dz_i = (z_{(i)}\,,\, du)$$

dargestellt, so ist $A - z_{(1)}^2 = z_{(2)}^2 + z_{(3)}^2$ eine Form der Krümmung null; und umgekehrt: ist die Krümmung von $A - z_{(1)}^2$ null, so kann man durch eine Quadratur zwei Differentiale dz_2 und dz_3 bestimmen, so dass

$$A - z_{(1)}^2 = z_{(2)}^2 + z_{(3)}^2$$

wird.

Um die Krümmung von $A - z_{(1)}^2$ zu berechnen, sei, wie in (29),

$$z_{(1)}\,.\,(A\,,\, z_{(1)}z_{(1)})^{-\frac{1}{2}} = p_{(1)}$$

gesetzt, was im allgemeinen, und, wenn Realität verlangt wird, stets möglich ist. Dadurch wird für $z = z_{(1)}$, $\zeta = \zeta_1 = \sqrt{1 - (A\,,\, zz)}$:

$$(A\,,\, xx) = (p_{(1)}\,,\, x)^2 + (p_{(2)}\,,\, x)^2, \qquad (p_{(1)}\,.\, p_{(2)}) = 1,$$

$$(A\,,\, xx) - (z\,,\, x)^2 = (q_{(1)}\,,\, x)^2 + (q_{(2)}\,,\, x)^2, \qquad (q_{(1)}\,,\, q_{(2)}) = \zeta,$$

wobei

$$q_{(1)} = \zeta.p_{(1)} = \zeta.\frac{z}{\sqrt{1-\zeta^2}}, \qquad q_{(2)} = p_{(2)}.$$

Nunmehr ist nach (24)

$$Ip_{(1)} = \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}^3}\left(z\,,\,\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right), \qquad Iq_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}^3}\left(z\,,\,\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right),$$

weil ja $(z\,,\, du)$ ein exaktes Differential sein soll. Mithin ist

$$Iq_{(1)} = \frac{1}{\zeta}\, Ip_{(1)},$$

und daraus nach (C), weil $q_{(2)} = p_{(2)}$:

$$q_{(3)} = \frac{1}{\zeta} p_{(3)} \quad \text{und} \quad Iq_{(3)} = \frac{1}{\zeta} K_a - \frac{1}{\zeta^2}\left(p_{(3)}, \frac{\partial \zeta}{\partial u}\right).$$

Es war

$$(A, zz) = 1 - \zeta^2;$$

somit ist $\frac{\partial (A, zz)}{\partial u} = -2\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial u}$ und nach (29″) und (32‴)

$$\left(p_{(3)}, \frac{\partial \zeta}{\partial u}\right) = \frac{1}{2\zeta . (A, zz)}\left(Z, z\frac{\partial (A, zz)}{\partial u}\right) = \frac{\Delta_{22} z}{\zeta}.$$

Wir erhalten mithin für die Krümmung von $A - dz^2$ den Ausdruck

$$\{K_a(1 - \Delta_1 z) - \Delta_{22} z\}(1 - \Delta_1 z)^{-2}$$

und damit den bekannten Satz:

XV. *Genügt z der Differentialgleichung*

$$\text{(F)} \qquad \Delta_{22} z = K_a(1 - \Delta_1 z),$$

und ist $\Delta_1 z \gtrless 1$, so kann man durch Quadraturen zwei Funktionen x, y bestimmen, *derart dass $(A, dudu) = dx^2 + dy^2 + dz^2$ wird.*

Ist $\Delta_1 z = 1$, so ist nach (33) $\Delta_{22} z = 0$ und (F) erfüllt. Andererseits ist die Discriminante von $A - dz^2$ null, d. h.

$$(A, dudu) = dz^2 + (p, dudu),$$

wo p nur im Falle $K_a = 0$ ein exaktes Differential sein kann. Die Differentialgleichung besitzt also Integrale, die zu dem Deformationsproblem in keinerlei Beziehung stehen. Ausserdem werden die Funktionen x und y nur dann reell, wenn $\Delta_1 z < 1$ ist. Nach irgend welchen bekannten Methoden ist die Gleichung nur in dem fast trivialen Fall $K_a = 0$ zu integrieren.

IX.

§ 27. Differentiiert man beide Seiten der Gleichung

$$(A, xy) = \sum_i (z_{(i)}, x)(z_{(i)}, y), \qquad (i = 1, 2, 3)$$

drückt $\partial z_{(i)}$ durch Z_i aus und schreibt p für du, so kommt:

$$\sum_i (Z_i, xp)(z_{(i)}, y) + \sum_i (Z_i, yp)(z_{(i)}, x) = 0.$$

Vertauscht man p, x, y, so folgt aus der Symmetrie der Formen Z_i:

$$\sum_i (Z_i, xy)(z_{(i)}, p) = 0.$$

Da die Gleichung (42) die einzige lineare Relation zwischen den Formen $a_{(i)}$ ist, muss

(45) $$(Z_i, xy) = -\zeta_i(C, xy) \quad \text{oder} \quad (\partial z_{(i)}, x) = -\zeta_i(C, xdu)$$

sein, wobei auch C eine symmetrische Form ist. Sie wird in der Flächentheorie als *zweite Fundamentalform* bezeichnet und lässt sich als:

(45′) $$(C, xdu) = \sum_i d\zeta_i(z_{(i)}, x) = -\sum_i \zeta_i(Z_i, xdu)$$

darstellen.

Das Differential $d\zeta_i$ sei mit $(\bar{z}_{(i)}, du)$ bezeichnet. Damit ist

$$(\bar{z}_{(1)}, du) = (\partial z_{(2)}, z_{(3)}) + (z_{(2)}, \partial z_{(3)}) = -\zeta_2(C, z_{(1)}du) + \zeta_3(C, z_{(2)}du).$$

Drückt man die ζ_i durch die $z_{(i)}$ aus und beachtet $(z_{(i)}, z_{(i)}) = 0$, so wird:

$$(\bar{z}_{(1)}, du) = -\sum_{i=1}^{3} (z_{(i)}, z_{(1)})(C, z_{(i)}du) = \sum_{i=1}^{3} (z_{(i)}, z_{(1)})(z_{(i)}, {}^c du) = (A, z_{(1)}{}^c du),$$

also allgemein:

(46) $$(\bar{z}_{(i)}, x) = -(z_{(i)}, {}^{ac}x).$$

Hieraus ergiebt sich nach (23) und (43′):

$$\sum (\bar{z}_{(i)}, x)^2 = (A, {}^c x^c x) = (A, C)(C, xx) - Dc(A, xx).$$

Diese Form, welche das Quadrat des Linienelementes der Gauss'schen Kugel darstellt, sei mit (G, xx) bezeichnet. Man findet leicht:

$$\frac{1}{2}(G, G) = Dg = (Dc)^2.$$

Dc sei mit K bezeichnet und der Fall $K = 0$ von der weiteren Betrachtung ausgeschlossen. Dann ist mit A und C auch G bekannt, und die

Bestimmung der ζ_i erfordert die Integration der im VII^ten Capitel erwähnten Riccatischen Gleichung. Hiermit hat man auch die Formen $z_{(i)}$; denn aus (46) folgt, indem man ${}^{ca}x$ für x setzt:

$$(46') \qquad (z_{(i)}\,,\,x) = -K^{-1}(\bar{z}_{(i)}\,,\,{}^{ca}x) = -K^{-1}(A\,,\,{}^{c}\bar{z}_{(i)}x).$$

Diese Ausdrücke erfüllen identisch die Forderung

$$\sum z_{(i)}^2 = A.$$

§ 28. Die angegebenen Schritte sind dann und nur dann ausführbar, wenn die Ausdrücke (46′) integrabel sind und $K_g = 1$ ist. Um die Bedingungen dafür aufzustellen, führe ich neben den in bezug auf A auch die in bezug auf G gebildeten Invarianten ein und unterscheide sie durch einen Strich ′ von den ersteren. Da $Dg = K^2$, kann $T' = KT$ gewählt werden.

Zunächst folgt aus (46′), indem man für x links Kx, rechts $-{}^{cc}x$ einsetzt:

$$K^2(z_{(i)}\,,\,x) = (A\,,\,{}^{c}\bar{z}_{(i)}{}^{cc}x) = (G\,,\,\bar{z}_{(i)}{}^{c}x).$$

Von den Systemen $z_{(i)}, \bar{z}_{(i)}, A, G$ und C sind die mit *lateinischen* Buchstaben zu schreibenden Coefficienten von der speciellen Wahl von T unabhängig definiert. Daraus ergiebt sich, dass auch $(z_{(i)}, x) = \sum_\lambda z_{i,\lambda}\xi_\lambda$ T nicht enthält, während in $(G, \bar{z}_i{}^c x)$ T^2 im Nenner steht (cf. § 10 und 11). Daher lautet die letzte Gleichung, mit $T' = TK$ in Bezug auf G gebildet:

$$(46'') \qquad (z_{(i)}\,,\,x)' = (G\,,\,\bar{z}_{(i)}{}^{c}x)'.$$

Die Integrabilitätsbedingung von $z_{(i)}$ ist erfüllt, wenn $(\delta' z_{(i)}\,,\,x)$ eine symmetrische Form in x und du ist. Nun ist $\delta' G = 0$, also

$$(46''') \qquad (\delta' z_{(i)}\,,\,x)' = (G\,,\,\delta'\bar{z}_{(i)}{}^{c}x)' + (G\,,\,\bar{z}_{(i)}{}^{\delta' c}x)'.$$

Aus der Definitionsgleichung von G,

$$\sum(\bar{z}_{(i)}\,,\,x)^2 = (G\,,\,xx),$$

kann aber genau wie in § 27, Gl. (45, 45′), geschlossen werden, dass

$$(\delta'\bar{z}_{(i)}\,,\,x)' = -\zeta_i'(B\,,\,xdu)'$$

sein muss, wenn

$$\zeta'_1 = (\bar{z}_{(2)}, \bar{z}_{(3)})' = \frac{1}{K}(\bar{z}_{(2)}, \bar{z}_{(3)}) \quad \text{u. s. f. und} \quad (B, x\,du)' = \sum_i d\zeta'_i(\bar{z}_{(i)}, x)'.$$

Nun ist nach (46)

$$(\bar{z}_{(2)}, \bar{z}_{(3)}) = ({}^{ca}z_{(2)}, {}^{ca}z_{(3)}) = K(z_{(2)}, z_{(3)}),$$

also allgemein $\zeta'_i = \zeta_i$, d. h. $B = G$ und

$$(\partial' \bar{z}_{(i)}, x)' = -\zeta_i(G, x\,du)'.$$

Damit wird die erste Form der rechten Seite in (46‴) zu

$$-(\partial' \bar{z}_{(i)}, {}^{gc}x)' = \zeta_i(G, {}^{gc}x\,du)' = -\zeta_i(C, x\,du)',$$

jedenfalls also symmetrisch in Bezug auf x und du, und es bleibt dieselbe Bedingung noch für $(G, \bar{z}_{(i)}{}^{\partial' c}x)' = -(\partial' C, {}^{g}\bar{z}_{(i)}x)'$ zu erfüllen. Da unter den drei Formen ${}^{g}\bar{z}_{(i)}$ zwei linear unabhängige sind, kann ein beliebiges System y für ${}^{g}\bar{z}_{(i)}$ gesetzt werden, so dass endlich die Integrabilität der Ausdrücke (46″) durch folgende Identität bedingt wird:

$$\text{(G)} \qquad (\partial'_1 C, y\,d_2 u)' = (\partial'_2 C, y\,d_1 u)'.$$

§ 29. Um K_g zu berechnen bringt man am besten die drei Formen A, C, G auf die gemeinsame Normalform. Man überzeugt sich leicht, dass dabei

$$A = p^2_{(1)} + p^2_{(2)}, \qquad (p_{(1)}, p_{(2)}) = 1,$$
$$C = \lambda_1 p^2_{(1)} + \lambda_2 p^2_{(2)},$$
$$G = \lambda_1^2 p^2_{(1)} + \lambda_2^2 p^2_{(2)}$$

wird. Es ist nämlich nach § 13

$$(A, C) = \lambda_1 + \lambda_2, \qquad K = \lambda_1 \lambda_2,$$

womit sich aus

$$G = (A, C)C - KA$$

der gewünschte Ausdruck für G ergiebt.

Setzt man noch

$$q_{(1)} = \lambda_1 p_{(1)}, \qquad q_{(2)} = \lambda_2 p_{(2)},$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{\mu_1}, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{\mu_2},$$

so wird

$$G = q_{(1)}^2 + q_{(2)}^2, \quad (q_{(1)} q_{(2)})' = 1, \quad C = \mu_1 q_{(1)}^2 + \mu_2 q_{(2)}^2, \quad A = \mu_1^2 q_{(1)}^2 + \mu_2^2 q_{(2)}^2.$$

Die algebraische Beziehung zwischen den drei Formen A, C, G ist also symmetrisch in Bezug auf A und G.

Zunächst ergiebt sich, wenn (28′) auf $q_{(1)}, q_{(2)}$ angewandt wird, aus

$$(C, xy)' = \sum_{\rho=1}^{2} (p_{(\rho)}, y)'(q_{(\rho)}, x)':$$

$$(\delta' C, xy)' = \Big\{\sum_\rho (\delta' p_{(\rho)}, y)'(q_{(\rho)}, x)'\Big\} + (q_{(3)}, du)'\{(p_{(1)}, y)'(q_{(2)}, x)' - (p_{(2)}, y)'(q_{(1)}, x)'\},$$

also

$$(\delta_2' C, x d_1 u)' - (\delta_1' C, x d_2 u)' =$$

$$(d_1 u, d_2 u)'\Big[\Big\{\sum_\rho I' p_{(\rho)} . (q_{(\rho)}, x)'\Big\} + (p_{(1)}, q_{(3)})'(q_{(2)}, x)' - (p_{(2)}, q_{(3)})'(q_{(1)}, x)'\Big].$$

Da dieser Ausdruck nach (G) null ist, müssen die Coefficienten von $q_{(1)}$ und $q_{(2)}$ einzeln verschwinden. Beachtet man dabei, dass $p_{(\rho)} = \mu_\rho q_{(\rho)}$ und

$$(q_{(2)}, q_{(3)})' = I' q_{(1)}, \qquad (q_{(3)}, q_{(1)})' = I' q_{(2)}$$

ist, so kommt:

$$I' p_{(1)} = \mu_2 I' q_{(1)}, \qquad I' p_{(2)} = \mu_1 I' q_{(2)},$$

oder, da

(47) $$Ip = K . I'p \text{ ist:}$$

$$I p_{(1)} = \lambda_1 I' q_{(1)}, \qquad I p_{(2)} = \lambda_2 I' q_{(2)},$$

d. h. nach (28″) und (18′)

(G′) $$p_{(3)} = q_{(3)}.$$

Da diese Bedingung mit (G) gleichbedeutend, andererseits aber vollkommen symmetrisch in Bezug auf die Formen A und G ist, *gilt* (G) *auch, wenn die Operation δ' durch δ ersetzt wird. Die Formel* (G) *ist identisch mit den sogenannten Codazzischen Formeln.*

Nach (G') ist nunmehr

$$Ip_{(3)} = Iq_{(3)},$$

d. h. nach (47):

$$K_a = K_g \,.\, K,$$ [1]

woraus sich, da $K_g = 1$ sein soll, die Gauss'sche Relation

$$K = K_a$$

ergiebt.

Damit erhält man folgenden Satz:

XVI. *Zu jedem Tripel von Funktionen z_1, z_2, z_3, welche die Bedingung*

$$dz_1^2 + dz_2^2 + dz_3^2 = (A\,,\, dudu), \qquad (K_a \gtrless 0)$$

erfüllen, gehört eine symmetrische Form C, welche den Relationen

$$Dc = K_a,$$

$$(\delta_2 C\,,\, xd_1 u) - (\delta_1 C\,,\, xd_2 u) = 0$$

genügt, und umgekehrt. Die Bestimmung der dz_i aus A und C erfordert die Integration einer totalen Riccatischen Differentialgleichung.

X.

§ 30. Wenn man A auf zwei verschiedene Weisen als Summe dreier Quadrate dargestellt hat:

$$(A\,,\, xx) = \sum_i (a_{(i)}\,,\, x)^2 = \sum_\lambda (z_{(\lambda)}\,,\, x)^2,$$

so existiert ein und nur ein orthogonales System der Determinante $+1$, welches die Bedingungen

$$(48) \qquad z_{(\lambda)} = \sum_i a_{(i)} X_i^{(\lambda)}$$

erfüllt. Nach (44) muss dabei

$$X_i^{(\lambda)} = (A\,,\, a_{(i)} z_{(\lambda)}) + h_\lambda a_i$$

[1] WEINGARTEN, Festschrift der techn. Hochschule zu Berlin, 1884; pag. 25, Gleich. 13.

und aus Symmetriegründen (weil auch $a_{(i)} = \sum_\lambda X_i^{(\lambda)} z_{(\lambda)}$ ist)

$$h_\lambda = h \, . \, \beta_\lambda$$

sein. Die Orthogonalitätsbedingungen reduzieren sich nach (42) und (43') auf

$$h^2 = 1,$$

und man rechnet leicht nach, dass h der Wert der Determinante des Orthogonalsystems ist.

Umgekehrt folgt aus den Orthogonalitätsbedingungen wieder: $\sum z^2_{(\lambda)} = \sum a^2_{(i)}$, so dass durch den Ansatz (48) die Forderung $\sum z^2_{(\lambda)} = A$ in allgemeinster Weise identisch befriedigt ist. Damit führt das Deformationsproblem auf die Aufgabe, *alle orthogonalen Systeme zu bestimmen, für die die Formen* $z_{(\lambda)}$ *in* (48) *exakte Differentiale* dz_λ *werden.*

Die Integrabilitätsbedingungen der $z_{(\lambda)}$ werden unter Einführung der Formen $r_{(ik)}$ des siebenten Kapitels zu

$$I a_{(i)} + \sum_k (a_{(k)}, r_{(ki)}) = 0, \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

oder ausgeschrieben:

(49) $$I a_{(1)} = (a_{(2)}, r_{(3)}) - (a_{(3)}, r_{(2)}); \qquad I a_{(2)} = (a_{(3)}, r_{(1)}) - (a_{(1)}, r_{(3)});$$
$$I a_{(3)} = (a_{(1)}, r_{(2)}) - (a_{(2)}, r_{(1)}).$$ [1]

Ausser diesen algebraischen Gleichungen unterliegen die Formen $r_{(i)}$ noch den Gleichungen (C'). Und umgekehrt, wenn drei Formen $r_{(i)}$ den Gleichungen (C') und (49) genügen, so existieren orthogonale Systeme, die (36) erfüllen, und für alle diese Systeme sind die Formen

$$(z_{(\lambda)}, du) = \sum_i (a_{(i)}, du) X_i^{(\lambda)}$$

exakte Differentiale.

Ferner gilt folgender Satz:

XVII. *Kennt man von dem zu einer Lösung* $z_{(1)}, z_{(2)}, z_{(3)}$ *gehörigen Orthogonalsystem drei Grössen mit demselben unteren Index (etwa* 1*), und sind derselben von einander unabhängige Funktionen, so kennt man auch die übrigen Grössen des Systems und damit* $z_{(1)}, z_{(2)}$ *und* $z_{(3)}$ *selbst.*

[1] Cf. Darboux, Bd. I, Cap. VII.

Zunächst ist nämlich die Discriminante von

$$(G_1, du du) = \Sigma dX_i^{(\lambda)} dX_i^{(\lambda)} = (r_{(2)}, du)^2 + (r_{(3)}, du)^2$$

nicht null; daher giebt es unendlich viele Paare $g_{(2)}, g_{(3)}$ von *unabhängigen* Formen, für die

$$G_1 = g_{(2)}^2 + g_{(3)}^2.$$

Drückt man die $r_{(2)}, r_{(3)}$ durch ein specielles solches Paar linear aus, so bilden die Coefficienten wegen

$$r_{(2)}^2 + r_{(3)}^2 = g_{(2)}^2 + g_{(3)}^2$$

ein orthogonales System, so dass man

$$r_{(2)} = g_{(2)} \sin\varphi + g_{(3)} \cos\varphi; \qquad r_{(3)} = -g_{(2)} \cos\varphi + g_{(3)} \sin\varphi$$

setzen kann. Durch

$$Ia_{(1)} = (a_{(2)}, r_{(3)}) - (a_{(3)}, r_{(2)})$$

ist dann φ und damit $r_{(2)}$ und $r_{(3)}$ selbst zweideutig bestimmt. Nach (40') findet man daraus unmittelbar die andern Reihen des Systems, w. z. b. w.

§ 31. Die Zweideutigkeit beschränkt sich auf das Vorzeichen der $r_{(i)}$, wenn $Ia_{(1)} = 0$ ist. Diese Thatsache führt auf zwei besonders einfache Specialisierungen, indem man entweder auch $Ia_{(2)}$ und $Ia_{(3)}$, oder aber $a_{(1)}$ selbst als identisch verschwindend annimmt. Im ersten Fall wäre in dem Tripel $a_{(1)}, a_{(2)}, a_{(3)}$ eine particuläre Lösung der Aufgabe von vornherein bekannt. Dies entspricht auch vollständig dem geometrischen Sinn des Deformationsproblems, bei dem es sich um die Biegungen einer »*gegebenen Fläche*« handelt. Da auch zugleich die Gleichungen (49) homogen werden, dürfte die Untersuchung dieses Falles vielleicht lohnend sein.

Unter der zweiten Annahme, dass eine der Formen $a_{(i)}$, — und zwar sei dies jetzt $a_{(3)}$ — identisch null sei, geht zwar die Symmetrie der Gleichungen (49) verloren, dafür aber bestimmen die beiden ersten,

$$Ia_{(1)} = (a_{(2)}, r_{(3)}), \qquad Ia_{(2)} = (r_{(3)}, a_{(1)}),$$

$r_{(3)}$ vollständig, und zwar ist $r_{(3)}$ dieselbe Form, die im IV^ten Capitel für $a_{(1)} = p_{(1)}$, $a_{(2)} = p_{(2)}$ mit $p_{(3)}$ bezeichnet war, also auch $Ir_{(3)} = K_a$.

Ist aber $r_{(3)}$ bekannt, so ist auch die zur Darstellung des orthogonalen Systems durch die Formeln (E) dienende Hülfsfunktion z als Funktion von u_1, u_2 definiert. Und zwar muss $z = \text{const.}$ das allgemeine Integral von $(r_{(3)}, du) = 0$ sein; aber z muss nicht die allgemeinste Funktion sein, die diese Bedingung erfüllt; denn die allgemeinste Funktion ist $\varphi(z)$, und diese liefert dasselbe orthogonale System, wie z.

Hat man für z eine specielle Wahl getroffen, so ist nach (E) das Quadrat σ des zu z gehörigen Multiplicators von $r_{(3)}$ gleich der in Bezug auf die Form $G_1 = \sum_\lambda dX_1^{(\lambda)} dX_1^{(\lambda)}$ zu bildenden Invariante $\Delta_1 z$, vorausgesetzt, dass die Discriminante von G_1 nicht null ist.

Um die Formeln (E) anwenden zu können sei wieder der Fall $K_a = 0$ ausgeschlossen. Dann ist $r_{(3)}$ kein exaktes Differential und z und $\Delta_1 z = \sigma$ sind wohlbestimmte, unabhängige Funktionen $z(u_1, u_2)$, $\sigma(u_1, u_2)$ von u_1 und u_2. Daher sind die $X_1^{(\lambda)}$ auch Funktionen von z und σ, und umgekehrt sind z und σ Funtionen zweier der $X_1^{(\lambda)}$ oder überhaupt zweier unabhängiger Parameter x_1, x_2, durch die man die $X_1^{(\lambda)}$ so dargestellt hat, dass die Summe ihrer Quadrate identisch 1 ist. Dann gilt aber der Satz:

XVIII. *Kennt man z als Funktion von x_1, x_2, so kennt man das ganze orthogonale System und die zugehörige Lösung $z_{(1)}, z_{(2)}, z_{(3)}$.*

Man kennt nämlich G_1 in seiner Darstellung durch x_1, x_2, also mit z auch $\sigma = \Delta_1 z$ als Funktion von x_1, x_2. Damit kennt man, den funktionalen Zusammenhang zwischen den u und den x, d. h. man kennt die $X_1^{(\lambda)}$ und nach Satz XVII oder durch die Formeln (E) das ganze System.

§ 32. Es bleibt noch die Frage: *Wie darf z als Funktion von x_1, x_2 gewählt werden, damit es wirklich zu einer Lösung des Problems gehört?*

Die Darstellung des orthogonalen Systems durch (E) befriedigt die Orthogonalitätsbedingungen und die Gleichungen (C') identisch. Durch die Annahme $z = z(u_1, u_2)$, $\Delta_1 z = \sigma(u_1, u_2)$ wurden die Gleichungen

$$Ia_{(1)} = (a_{(2)}, r_{(3)}), \qquad Ia_{(2)} = (r_{(3)}, a_{(1)})$$

erfüllt. Es bleibt also nur noch:

$$(49') \qquad (a_{(1)}, r_{(2)}) - (a_{(2)}, r_{(1)}) = 0.$$

Führt man in A z und σ als neue Veränderliche ein, so werde

$$(a_{(1)}, du) = a dz + \alpha d\sigma,$$

$$(a_{(2)}, du) = b dz + \beta d\sigma,$$

wo a, α, b, β bekannte Funktionen von z und σ sind. Dann lautet (49') ausgeschrieben und mit $\theta(z, \Delta_1 z)\sqrt{\Delta_1 z}$ multipliciert:

$$\text{(W)} \qquad a\Delta_1 z + \alpha\Delta(z, \Delta_1 z) - b\frac{\Delta_{11} z}{\sqrt{\Delta_1 z}} - 2\beta\Delta_{22} z\sqrt{\Delta_1 z} = 0,$$

worin die Invarianten aus der Form G_1 in x_1, x_2 gebildet sind und für σ überall $\Delta_1 z$ zu setzen ist. Hiermit folgt der Satz:

XIX. *Zu jedem Integral z der Differentialgleichung* (W), *für welches $\Delta_1 z$ eine von z unabhängige Funktion ist, gehört eine Lösung des Deformationsproblems, für die die Form G_1 des zugehörigen Orthogonalsystems eine nicht verschwindende Discriminante besitzt, und umgekehrt.*

Wenn also Lösungen des Problems existieren, für die die Discriminante von G_1 null ist, so werden sie durch die Integration der Differentialgleichung (W) *nicht* gefunden.

Die Differentialgleichung ist zuerst von Hrn. WEINGARTEN in der Preisschrift aufgestellt worden. Sie lässt sich, wie Herr WEINGARTEN ebenda gezeigt hat, für sämtliche bis jetzt bekannten Fälle, in denen das Deformationsproblem vollständig gelöst ist, nach bekannten Methoden integrieren, für das Rotationsparaboloid z. B. durch Zwischenintegrale.

§ 33. Herr WEINGARTEN bezeichnet die Einführung der Variabeln z und σ in die quadratische Form A als *Reduktion* der Form. Das Kriterium, ob die Form $(a dz + \alpha d\sigma)^2 + (b dz + \beta d\sigma)^2$ reduziert ist, und ob zu der Zerlegung in zwei Quadrate die Form $(r_{(3)}, du) = -dz : \sqrt{\sigma}$ gehört, lautet

$$Ia_{(1)} = (a_{(2)}, r_{(3)}), \qquad Ia_{(2)} = (r_{(3)}, a_{(1)}),$$

oder ausgeschrieben:

$$(50) \qquad \frac{\partial a}{\partial \sigma} - \frac{\partial \alpha}{\partial z} = \frac{\beta}{\sqrt{\sigma}}; \qquad \frac{\partial b}{\partial \sigma} - \frac{\partial \beta}{\partial z} = -\frac{\alpha}{\sqrt{\sigma}}.$$

Das Kriterium, ob eine noch nicht in Quadrate zerlegte Form A redu-

ziert ist, d. h. ob in ihr $r_{(3)} = -\frac{dz}{\sqrt{\sigma}}$ gewählt werden darf, ist nach Satz XI:

$$Ir_{(3)} = K_a \quad \text{oder} \quad T.K_a = \frac{1}{2\sqrt{\sigma}^3}.$$

Die zugehörige Zerlegung ergiebt sich nach demselben Satz durch eine Quadratur.

Aus einer nicht reduzierten Form $(A, dudu)$ kann man durch eine Quadratur jederzeit eine reduzierte herstellen. Wählt man nämlich $r_{3,2} = 0$, d. h.

$$(r_{(3)}, du) = r_{3,1} du_1,$$

so wird wegen $Ir_{(3)} = K_a$

$$\frac{\partial r_{3,1}}{\partial u_2} = TK_a, \qquad r_{3,1} = \int TK_a du_2.$$

Führt man also

$$z = u_1, \qquad \sigma = \left(\int TK_a du_2\right)^{-2}$$

als neue Variable ein, so wird, wie verlangt, $r_{(3)}$ zu $-\frac{dz}{\sqrt{\sigma}}$, bei geeigneter Definition der Vorzeichens von $\sqrt{\sigma}$.

Diese Reduktion und Zerlegung einer gegebenen Form durch Quadraturen ist in der a. v. S. angeführten Arbeit des Hrn. Weingarten in ausführlichster Weise dargestellt.

XI.

§ 34. Da durch die Integration der Differentialgleichung (W) diejenigen Lösungen des Problems, für die die Discriminante von G_1 verschwindet, nicht gefunden werden, so entsteht die Aufgabe, im gegebenen Falle zu entscheiden, ob solche Lösungen existieren, und, wenn dies der Fall ist, die zu ihrer Auffindung notwendigen Schritte anzugeben. Obgleich das Auftreten solcher Lösungen durchaus singulär ist, *kann man trotzdem für eine beliebige Form A die Reduktion und die Aufstellung der Differentialgleichung auf unendlich vielfache Weise so ausführen, dass eine beliebige, vorgeschriebene Lösung durch die Integration der Differentialgleichung*

nicht gefunden wird. Um dies einzusehen, bedient man sich am besten der geometrischen Anschauung.

Da $a_{(3)}$ identisch null ist, hat man nach (48) längs der Curven $(a_{(2)}, du) = 0$:

$$dz_1 : dz_2 : dz_3 = X_1^{(1)} : X_1^{(2)} : X_1^{(3)};$$

also sind die $X_1^{(\lambda)}$ die Richtungscosinus der Tangenten der Curven $(a_{(2)}, du) = 0$.

Wenn nun die Discriminante von $G_1 = r_{(2)}^2 + r_{(3)}^2$ null ist, so sind $r_{(2)}$ und $r_{(3)}$ abhängige Formen, d. h. $r_{(2)}$ ist durch $r_{(3)}$ teilbar. Das gleiche gilt von den $dX_1^{(\lambda)}$, da sie nach (40) lineare Verbindungen aus $r_{(2)}$ und $r_{(3)}$ sind. Längs der Curven $(r_{(3)}, du) = 0$ ist also $dX_1^{(\lambda)} = 0$, d. h.:

Ist die Discriminante von G_1 null, so sind die Tangenten der Curven $(a_{(2)}, du) = 0$ längs der Curven $(r_{(3)}, du) = 0$ einander parallel.

Die Curven $(r_{(3)}, du) = 0$ sind also Schattengrenzen der Fläche bei Beleuchtung aus unendlicher Entfernung und mögen kurz als *Streiflinien* der Fläche bezeichnet werden. Auf jeder Fläche nicht verschwindender Krümmung giebt es ∞^2 Streiflinien; jedem unendlich fernen Punkte entspricht eine, und längs einer jeden ist der Fläche ein Cylinder umschrieben.

Wählt man daher auf einer Fläche $\mathfrak{F}$ vom Linienelement $ds = \sqrt{(A, du\,du)}$ eine einfach unendliche Schaar Streiflinien, so umhüllen die erzeugenden Geraden der zugehörigen Cylinder eine Schaar von Curven der Fläche, etwa $(p, du) = 0$. Setzt man $(p, du) : \sqrt{A, pp} = (a_{(2)}, du)$, so ist

$$A = a_{(1)}^2 + a_{(2)}^2,$$

und die Discriminante von G_1 verschwindet, da die Cosinus der Tangenten der Curven $(a_{(2)}, du) = 0$ nur von dem Parameter der Streiflinien abhängen.

Bildet man also aus $a_{(1)}$ und $a_{(2)}$ $r_{(3)}$, bringt es auf die Form $dz : \sqrt{\sigma}$ (was ohne Integration ausführbar ist, wenn die Streiflinienschaar durch eine endliche Gleichung gegeben war) und stellt die Differentialgleichung für z auf, so liefert die Integration derselben die Fläche $\mathfrak{F}$ nicht, w. z. b. w.

Andererseits giebt es für jede Form[1] *A Differentialgleichungen* (W),

[1] sc. nicht verschwindender Krümmung.

die sämmtliche Lösungen des Problems liefern, d. h. es giebt auf jeder Fläche eine Schaar von Curven, die für keine Biegung der Fläche sämtlich Streiflinien werden.

Wählt man z. B. für $a_{(1)}$ ein exaktes Differential, so wird $Ia_{(1)} = 0$ und $r_{(3)}$ durch $a_{(2)}$ teilbar, d. h. die Curven $(a_{(2)}, du) = 0$ und $(r_{(3)}, du) = 0$ fallen zusammen. Sind aber die Tangenten der $a_{(2)}$-Curven längs dieser Curven selbst parallel, so sind die Curven Gerade, die Fläche ist geradlinig.

Bringt man also A — was immer möglich ist, — auf die Gestalt

$$dp^2 + Pdq^2,$$

wo P nicht von der Gestalt

$$\varphi(q)p^2 + \psi(q)p + \chi(q)$$

ist, so liefern die Formen

$$(a_{(1)}, du) = dp,$$
$$(a_{(2)}, du) = Pdq$$

eine Differentialgleichung (W), der keine Lösung des Problems entgeht.

§ 35. Wenn die Discriminante von G_1 null ist, ist $(r_{(2)}, r_{(3)}) = 0$. Im Kapitel VI war gezeigt, dass man dann im allgemeinen

$$(r_{(1)}, du) = dp, \quad (r_{(2)}, du) = \cos(p - p_0)dt, \quad (r_{(3)}, du) = -\sin(p - p_0)dt$$

setzen kann, wobei p_0 nur von t abhängt. Ist $z =$ const. wieder das allgemeine Integral von $r_{(3)} = 0$, $-\sqrt{\sigma}$ der zugehörige Multiplikator, dann ist t eine Funktion von z allein, ebenso p_0. Durch diese beiden ist p gegeben; es wird

(51) $$\sin(p - p_0)\frac{dt}{dz} = \frac{1}{\sqrt{\sigma}},$$

also

(51′) $$p = p_0 + \arcsin\frac{1}{\tau\sqrt{\sigma}},$$

wenn $\frac{dt}{dz} = \tau$ gesetzt wird.

Es bleibt also zu entscheiden, ob zwei Funktionen p_0 und τ von z so bestimmt werden können, dass die Gleichung

$$(a_{(1)}, r_{(2)}) = (a_{(2)}, r_{(1)})$$

identisch erfüllt ist. Dieselbe wird unter Beachtung der Relationen

$$(r_{(1)}, du) = dp, \qquad r_{(2)} = -\operatorname{cotg}(p - p_0) r_{(3)}, \qquad (r_{(3)}, a_{(1)}) = I a_{(2)}$$

zu

$$\operatorname{cotg}(p - p_0) I a_{(2)} = \left(a_{(2)}, \frac{\partial p}{\partial u}\right), \tag{52}$$

und, wenn man A als reduzierte Form annimmt, $u_1 = z$, $u_2 = \sigma$ setzt und p nach (51, 51′) ausdrückt, zu

$$(\tau^2\sigma - 1)\left(\frac{\partial b}{\partial \sigma} - \frac{\partial \beta}{\partial z}\right) + \frac{b}{2\sigma} - \beta\frac{\tau'}{\tau} + \beta p_0' \sqrt{\sigma^2 - 1} = 0. \tag{P}$$

XX. *Dann und nur dann, wenn zwei Funktionen* τ *und* p_0' *von* z *allein der Gleichung* (P) *genügen, liefert die Differentialgleichung* (W) *nicht sämmtliche Lösungen des Deformationsproblems.*

Die Entscheidung, ob solche Funktionen existieren, wie auch die Bestimmung von p_0' und τ erfordert in jedem einzelnen Fall eine endliche Anzahl von Operationen und ist jederzeit ausführbar. Hat man p_0' und τ, so sind die $r_{(i)}$ bekannt, und die Bestimmung des orthogonalen Systems führt auf die Integration der Riccatischen Gleichung in Kap. VII. Dieselbe wird, wenn man

$$x = e^{(\eta + p)i}$$

setzt, zu

$$\frac{d\eta}{dt} = -i \sin(\eta + p_0),$$

d. h. die Bestimmung derjenigen Lösungen, welche bei der Integration der Gleichung (W) verloren gehen, erfordert die Integration einer *gewöhnlichen* Differentialgleichung erster Ordnung.

Nach Kap. VI kann auch

$$r_{(1)} = dp, \qquad r_{(2)} = e^{ip} dt, \qquad r_{(3)} = i e^{ip} dt$$

gesetzt werden.

Dann wird:

$$i e^{pi} = -\frac{1}{\tau\sqrt{\sigma}},$$

und für (49′) kommt:

$$I a_{(2)} + e^{ip}\left(a_{(2)}, \frac{\partial p i}{\partial u}\right) = 0$$

oder nach (24):

$$(\mathrm{P}^*) \qquad I\left(\frac{a_{(2)}}{\tau\sqrt{\sigma}}\right) = 0,$$

d. h. es muss $\frac{a_{(2)}}{\sqrt{\sigma}}$ einen Multiplikator besitzen, der nur von z abhängig ist. Die zugehörige Riccatische Differentialgleichung wird zu $\frac{d\eta}{dt} = e^{-i\eta}$ für $x = e^{(\eta+p)i}$ und gestattet die Bestimmung der (offenbar imaginären) Flächen ohne weiteres.

Es sei noch bemerkt, dass man durch Quadraturen beliebig viele Beispiele solcher singulären Differentialgleichungen (W) herstellen kann. Wählt man nämlich β, τ und p_0 beliebig, so ergiebt sich b aus (P) durch eine Quadratur. Denn man kann (52) auch so schreiben:

$$I(\cos(w - w_0)\, a_{(2)}) = \left(a_{(2)} \frac{\partial p_0}{\partial u}\right) \sin(w - w_0),$$

und da $\frac{\partial p_0}{\partial \sigma} = 0$, ergiebt sich daraus:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}(b \cos(p - p_0)) = \frac{\partial}{\partial z}(\beta \cos(p - p_0)) - \beta \sin(p - p_0)\frac{\partial p_0}{\partial z}.$$

Aus b und β findet man nach (50) α und durch eine zweite Quadratur a.

XII.

§ 36. Zur Erläuterung des Vorstehenden mögen kurz einige bekannte Sätze über Rotationsflächen abgeleitet werden. Sei

$$du^2 + P^2 dv^2$$

das Quadrat des Linienelementes einer Rotationsfläche, also P eine Funktion von u allein. Wählt man

$$a_{(1)} = P dv, \qquad a_{(2)} = du,$$

so wird

$$r_{(3)} = -\frac{dP}{du} dv;$$

also kann $z = v$, $\sigma = \left(\frac{du}{dP}\right)^2$ gesetzt werden, und man erhält:

$$A = Pdz^2 + \sigma dP^2 = Pdz^2 + \sigma P'^2 d\sigma^2,$$

wo P jetzt als Funktion von σ aufzufassen und $P' = \frac{dP}{d\sigma}$ ist. Dadurch wird

(53) $$a_{(1)} = Pdz, \qquad a_{(2)} = \sqrt{\sigma} P' d\sigma$$

d. h. $a = P, \quad \alpha = 0, \quad b = 0, \quad \beta = \sqrt{\sigma} P',$

und für (W) kommt:

(R) $$\Delta_{22} z = \varphi(\sigma) = \varphi(\Delta_1 z),$$

wobei

$$\varphi(\sigma) = \frac{P}{2P'}, \quad \text{also} \quad P = ce^{\frac{1}{2}\int \frac{d\sigma}{\varphi(\sigma)}} \text{ ist.}$$

φ ist mithin nicht identisch null, sonst aber ganz beliebig.

Zunächst überzeugt man sich leicht, *dass die Differentialgleichung* (R) *Integrale besitzen kann, die mit dem Deformationsproblem nichts zu thun haben.* Denn wenn $\varphi(\sigma)$ für $\sigma = \sigma_0$ verschwindet, so genügt jedes Integral von

$$\Delta_1 z = \sigma_0$$

auch (R), während doch $\Delta_1 z$ keine von z unabhängige Funktion, vielmehr eine Constante σ_0 ist.

Zweitens gehen bei der Integration der Differentialgleichung Flächen verloren. (P) wird nämlich zu

$$\tau' = \tau p_0' \sqrt{\tau^2 \sigma - 1},$$

was für $\tau' = 0$, $p_0' = 0$ möglich ist. p_0 kann unbeschadet der Allgemeinheit gleich null angenommen werden, dagegen ist τ von null verschieden. Die Integration der zu den Formen

$$r_{(1)} = dp, \qquad r_{(2)} = \cos p\, dt, \qquad r_{(3)} = -\sin p\, dt$$

gehörigen Riccatischen Differentialgleichung kann man vermeiden. Es wird

$$G_3 = dp^2 + \cos^2 p\, dt^2,$$

so dass

(54) $$X_3^{(1)} = \cos p \cos t, \qquad X_3^{(2)} = \cos p \sin t, \qquad X_3^{(3)} = \sin p$$

gesetzt werden kann. Für die andern findet man aus $dX_3^{(\lambda)} = X_1^{(\lambda)} r_{(2)} - X_2^{(\lambda)} r_{(1)}$:

$$X_1^{(1)} = -\sin t, \qquad X_2^{(1)} = \sin p \cos t,$$
$$X_1^{(2)} = \cos t, \qquad X_2^{(2)} = \sin p \sin t,$$
$$X_1^{(3)} = 0, \qquad X_2^{(3)} = -\cos p.$$

Beachtet man noch, dass $\sin p = 1 : \tau\sqrt{\sigma}$, $\tau = \text{const.}$, so erhält man für die z_λ:

$$z_1 = \frac{P}{\tau}\cos t, \qquad z_2 = \frac{P}{\tau}\sin t, \qquad z_3 = f\left(\frac{P}{\tau}\right) = \int \sqrt{\tau^2\sigma - 1}\,\frac{P'}{\tau}\,d\sigma,$$

also werden die zu $du^2 + P^2dv^2$ *gehörigen Rotationsflächen durch* (R) *nicht gefunden.*

§ 37. Stellt man die $X_1^{(\lambda)}$ durch die Formeln (54) dar, schreibt aber x und y für p und t, so wird

$$G_1 = dx^2 + \cos^2 x\, dy^2.$$

Für diese Wahl von G_1 besitzt (R), wie leicht nachzuweisen, das particuläre Integral von der Form $\varphi(x) + \psi(y)$:

$$z = cy + \int \sqrt{\sigma - \frac{c^2}{\cos^2 x}}\,dx,$$

wobei σ durch die Gleichung

$$P(\sigma) = e^{\frac{1}{2}\int \frac{d\sigma}{\varphi(\sigma)}} = \frac{m}{\sin x}, \qquad m = \text{const.}$$

als Funktion von x allein gegeben ist.

Man erhält aus diesem Integral die Schraubenflächen mit der z_3 Achse als Drehungsachse:

$$z_1 = r\cos\varphi, \qquad z_2 = r\sin\varphi, \qquad z_3 = f(r) + g\varphi,$$

wo

$$r = \sqrt{P^2c^2 - m^2c^2}; \qquad \varphi = y - \frac{\pi}{2}; \qquad g = mc;$$

$$f(r) = \int \sqrt{r^2\frac{\sigma}{c^2} - g^2 - r^2}\,\frac{dr}{r}.$$

§ 38. Wählt man als Gleichung der Rotationsfläche

$$z_3 = ic\log\sqrt{z_1^2 + z_2^2},$$

so wird (R) zu:

$$\Delta_{22}z = 1 - \Delta_1 z.$$

Dies ist die Gleichung (F) des VIII^ten Kapitels für $K = 1$. Daraus folgt der aus der Theorie der Weingartenschen Flächen bekannte Satz:

Kennt man alle Biegungen der Rotationsfläche der logarithmischen Linie, so findet man durch Quadraturen alle Flächen constanter Krümmung, und umgekehrt.

§ 39. In seinen Untersuchungen über die Flächen, zwischen deren Hauptkrümmungen eine Gleichung besteht, hat Hr. Weingarten gezeigt, dass das Deformationsproblem der Rotationsflächen äquivalent ist mit der Aufgabe, alle Formen der Krümmung 1 von der Gestalt:

$$p\,dz^2 + \varphi(p)\,dq^2 = (G_1, dx\,dx)$$

zu finden. Setzt man nämlich statt (53):

$$a_{(2)} = P\,dz, \qquad a_{(1)} = -\sqrt{\sigma}\,P'd\sigma,$$

so wird (W) zu

$$P'\Delta_1 z \Delta(z, \Delta_1 z) + P\Delta_{12} z = 0,$$

und wenn man Δ_{12} nach (32) ausdrückt, zu:

$$\Delta_2 z = \left(\frac{P'}{P} - \frac{1}{2\sigma}\right)\Delta(z, \Delta_1 z) = 0.$$

Für $dz = (r, dx)$ ist nach der Formel für $\Delta_2 z$ in § 18 $\Delta_2 z = I({}^g r)$, mithin:

$$\frac{P}{\sqrt{\sigma}} . I({}^g r) + \left({}^g r, \frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{P}{\sqrt{\sigma}}\right) = 0.$$

Nach (24) ist also $\frac{P}{\sqrt{\sigma}}$ ein Multiplikator von ${}^g r$, d. h. es ist

$$({}^g r, dx) = \frac{\sqrt{\sigma}\,dq}{P}$$

und

$$(G_1, dx\,dx) = \frac{(r, dx)^2 + ({}^g r, dx)^2}{(G, rr)} = \frac{dz^2}{\sigma} + \frac{dq^2}{P^2},$$

also von der verlangten Gestalt.

ÜBER DIE IRREGULÄREN INTEGRALE DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG MIT RATIONALEN COEFFICIENTEN

VON

J. HORN

in CHARLOTTENBURG.

Im 8. Band der Acta mathematica hat sich Herr POINCARÉ mit der asymptotischen Darstellung der irregulären Integrale der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten durch die im allgemeinen divergenten Normalreihen beschäftigt. In der Differentialgleichung

$$P_0\frac{d^ny}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+P_{n-1}\frac{dy}{dx}+P_ny=0$$

seien die Coefficienten ganze rationale Functionen von x und zwar P_0 vom Grad m, P_λ $(\lambda=1,\ldots,n)$ höchstens von Grad $m+\lambda k$; dann ist $x=\infty$ eine singuläre Stelle der Unbestimmtheit[1] für die Integrale, und die Differentialgleichung hat an dieser Stelle den Rang $p=k+1$.[2] Für eine Differentialgeichung vom Rang 1, in welcher der Grad der Coefficienten P_λ $(\lambda=1,\ldots,n)$ denjenigen von P_0 nicht übersteigt, untersucht Herr POINCARÉ[3] das Verhalten der Integrale bei der Annäherung der Veränderlichen x an die Stelle $x=\infty$ vermittels der Laplace'schen

[1] Bezeichnung von Herrn FUCHS (Sitzungsberichte der Berliner Akademie, 1886). Vgl. SCHLESINGER, *Handbuch der linearen Differentialgleichungen*.

[2] POINCARÉ, a. a. O.

[3] American Journal, Bd. 7; Acta math. Bd. 8.

Transformation.[1] Die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung vom Rang p ($p > 1$) wird auf eine Differentialgleichung np^{ter} Ordnung vom Rang 1 zurückgeführt; aus den Ausdrücken der Integrale y der ursprünglichen Gleichung durch geeignete Integrale der neuen Gleichung vom Rang 1 schliesst Herr POINCARÉ, dass, wenn die Veränderliche x mit einem bestimmten Argument ins Unendliche geht, das allgemeine Integral y durch eine der n Normalreihen asymptotisch dargestellt wird. Aber gerade die Differentialgleichungen *höheren Ranges* bedürfen noch einer eingehenderen Untersuchung, welche ich in dem vorliegenden Aufsatz zunächst für lineare Differentialgleichungen *zweiter Ordnung* in Anknüpfung an die citirten Arbeiten des Herrn POINCARÉ durchführe.[2] Abgesehen davon, dass bei Herrn POINCARÉ die auf Differentialgleichungen höheren Ranges bezüglichen Untersuchungen weniger vollständig geführt sind als diejenigen für den Rang 1, beschränke ich mich nicht auf Wege, welche mit einem bestimmten Argument nach der Stelle $x = \infty$ gehen, sondern ich suche das *Verhalten der Integrale in der ganzen Umgebung der singulären Stelle* so weit zu ergründen,[3] dass es gelingt, Aufschluss über die *Lage der Nullstellen in der Umgebung der Unbestimmtsheitsstelle* zu gewinnen und den *Begriff des Ranges als Verallgemeinerung des Begriffs des Geschlechts einer ganzen transcendenten Function* erscheinen zu lassen.

---

[1] Im 50. Bd. der Math. Annalen führe ich die auf Differentialgleichungen vom Rang 1 bezüglichen Untersuchungen in einer Richtung weiter, welche ich im 49. Bd. bereits für den einfachsten Fall, die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten, eingeschlagen habe.

[2] Im 118. Bd. von Crelles Journal habe ich die Differentialgleichung zweiter Ordnung vom Rang $k + 1$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x^k\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots\right)\frac{dy}{dx} + x^{2k}\left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \dots\right)y = 0$$

ohne Benutzung der Laplace'schen Transformirten nach einer Methode untersucht, welche sich, wie ich im 119. Bd. zeige, auf nicht lineare Differentialgleichungen übertragen lässt. Die in der vorliegenden Arbeit behandelte Differentialgleichung ist insofern specieller, als ihre Coefficienten rational sind; ich kann jedoch unter dieser Beschränkung mit Benutzung bestimmter Integrale das Verhalten der Integrale der Differentialgleichung weiter verfolgen, als es in meiner früheren Arbeit geschehen ist.

[3] Man vergleiche die Untersuchung der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten im 49. Bd. der Math. Ann.

Die hier geführten Untersuchungen, die sich für die Differentialgleichungen zweiter Ordnung besonders übersichtlich gestalten, gedenke ich in einer späteren Arbeit auf die allgemeinste lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten auszudehnen.

---

§ 1.

Die Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad P_0 \frac{d^2 y}{dx^2} + P_1 \frac{dy}{dx} + P_2 y = 0$$

habe als Coefficienten ganze rationale Funktion von den Graden m, $m + p - 1$, $m + 2p - 2$

$$P_0 = x^m + \ldots,$$
$$P_1 = a_1 x^{m+p-1} + \ldots,$$
$$P_2 = a_2 x^{m+2p-2} + \ldots,$$

so dass sie an der Unbestimmtheitsstelle $x = \infty$ den Rang p besitzt.[1] Die charakteristische Gleichung

$$\alpha^2 + a_1 \alpha + a_2 = 0$$

habe (in den drei ersten Paragraphen) zwei *verschiedene* Wurzeln α_1, α_2, so dass die Differentialgleichung (A) durch zwei Normalreihen

$$S_i = e^{\frac{\alpha_i x^p}{p} + \frac{\alpha_{i1} x^{p-1}}{p-1} + \ldots + \alpha_{i,p-1} x} x^{\rho_i} \left(C_i + \frac{C_{i1}}{x} + \frac{C_{i2}}{x^2} + \ldots \right) \qquad (i = 1, 2)$$

formell befriedigt wird. Wir setzen α_1 und α_2 als reell und $\alpha_1 > \alpha_2$ voraus, was durch eine Substitution von der Form

$$y = e^{\frac{\gamma x^p}{p}} y', \qquad x = cx'$$

erreicht werden kann.

[1] Der erste Coefficient von P_1 und die beiden ersten Coefficienten von P_2 sollen nicht gleichzeitig verschwinden.

Ist $y = f(x)$ ein Integral von (A) und ε eine primitive p^{te} Einheitswurzel, so genügt

$$y_\lambda = f(\varepsilon^\lambda x) \qquad (\lambda=1,\ldots,p-1)$$

einer Differentialgleichung

$$(A_\lambda) \qquad P_{\lambda 0}\frac{d^2 y}{dx^2} + P_{\lambda 1}\frac{dy}{dx} + P_{\lambda 2} y = 0,$$

welche durch die Normalreihen

$$S_1(\varepsilon^\lambda x)\ ,\ S_2(\varepsilon^\lambda x)$$

formell befriedigt wird.. Das Product

$$u = y y_1 \ldots y_{p-1}$$

genügt einer linearen Differentialgleichung $2^{p\text{ter}}$ Ordnung, welche, wenn

$$x^p = t$$

gesetzt wird, die Form

$$(B) \qquad Q_0 \frac{d^{2^p} u}{dt^{2^p}} + Q_1 \frac{d^{2^p-1} u}{dt^{2^p-1}} + \ldots + Q_{2^p} u = 0$$

annimmt und worin Q_0 im allgemeinen [1] nicht identisch verschwindet; $Q_0, Q_1, \ldots$ sind ganze rationale Functionen von t

$$Q_\mu = b_\mu t^q + \ldots, \qquad (\mu=0,1\ldots 2^p)$$

wo b_0 von Null verschieden angenommen werden kann, da die Differentialgleichung (B) vom Rang 1 ist.[2] Die Gleichung (B) wird durch die 2^p Reihen

$$S_{\lambda_0}\left(t^{\frac{1}{p}}\right) S_{\lambda_1}\left(\varepsilon t^{\frac{1}{p}}\right) \ldots S_{\lambda_{p-1}}\left(\varepsilon^{p-1} t^{\frac{1}{p}}\right),$$

wo jeder der Indices $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ den Werth 0 oder 1 haben kann, formell befriedigt, worunter sich die beiden Normalreihen von Rang 1

$$T_i = S_i\left(t^{\frac{1}{p}}\right) S_i\left(\varepsilon t^{\frac{1}{p}}\right) \ldots S_i\left(\varepsilon^{p-1} t^{\frac{1}{p}}\right) = e^{a'_i t} t^{\rho'_i}\left(D_i + \frac{D_{i1}}{t} + \frac{D_{i2}}{t^2} + \ldots\right) \quad (i=1,2)$$

---

[1] Der hier ausgeschlossene Ausnahmefall $Q_0 = 0$ wird in § 2 behandelt.

[2] POINCARÉ, a. a. O., § 5. — SCHLESINGER, Handbuch Bd. I, S. 355.

befinden. Diejenigen Reihen, in welchen k der Zahlen $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ gleich 1, die übrigen $p-k$ gleich 0 sind, enthalten einen Exponentialfactor von der Form

$$e^{\frac{k\alpha_1+(p-k)\alpha_2}{p}t+\ldots}.$$

Die charakteristische Gleichung

$$b_0\beta^{2\nu} + b_1\beta^{2\nu-1} + \ldots + b_{2\nu} = 0$$

von (B) besitzt demnach die Wurzeln

$$\alpha_1\,,\ \frac{(p-1)\alpha_1+\alpha_2}{p}\,,\ \frac{(p-2)\alpha_1+2\alpha_2}{p}\,,\ \ldots\,,\ \alpha_2$$

und zwar α_1 und α_2 einfach, die übrigen mehrfach. Die Laplace'sche Transformirte von (B)

$$\text{(C)} \qquad R_0\frac{d^q v}{dz^q} + R_1\frac{d^{q-1}v}{dz^{q-1}} + \ldots + R_q v = 0$$

hat als Coefficienten ganze Functionen $2^{p\text{ten}}$ Grades von z und zwar ist

$$R_0 = b_0 z^{2\nu} + b_1 z^{2\nu-1} + \ldots = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots.$$

Sind $0, 1, \ldots, q-2$ und λ_i $(i = 1, 2)$ die Wurzeln der zu $z = \alpha_i$ gehörigen determinirenden Gleichung, so hat (C) ein Integral von der Form

$$v_i = (z-\alpha_i)^{\lambda_i}\mathfrak{P}_i(z-\alpha_i), \qquad {\scriptstyle (i=1,2)}$$

wo $\mathfrak{P}_i(z-\alpha_i)$ eine in der Umgebung von $z = \alpha_i$ convergente Potenzreihe ist.[1] Dann ist durch die Gleichung

$$u_i = \int\limits_{l_i} v_i e^{tz}\,dz \qquad {\scriptstyle (i=1,2)}$$

für ein gewisses Gebiet der Veränderlichen t ein Integral von (B) dargestellt, wenn der Integrationsweg l_i aus einer mit $\arg(z-\alpha_i) = \omega$ aus dem Unendlichen kommenden, vor α_i endigenden Geraden, einem kleinen

[1] Im Text ist angenommen, dass λ_i keine ganze Zahl sei; andernfalls treten die Acta math. Bd. 8, S. 308—314, angegebenen Modificationen ein, ohne dass die Resultate sich ändern.

den Punkt $z = a_i$ einschliessenden Kreis und der rückwärts durchlaufenen Geraden besteht. Nehmen wir etwa $\omega = \pi$ an,[1] so gelten, wenn t als reelle positive Grösse ins Unendliche geht, die asymptotischen Gleichungen

$$u_1 \sim T_1\,,\ u_2 \sim T_2,$$

und es ist für $\lim t = +\infty$

$$\lim \frac{d \log u_1}{dt} = \alpha_1, \qquad \lim \frac{d \log u_2}{dt} = \alpha_2.$$

Der Grenzwerth der logarithmischen Ableitung eines Integrals u von (B) kann nur einen der Werthe

$$\alpha_1\,,\ \frac{(p-1)\alpha_1 + \alpha_2}{p}\,,\ \ldots\,,\ \alpha_2$$

haben,[2] welche der oben gemachten Voraussetzung gemäss reell und absteigend geordnet sind. Dann ist, wenn Integrale, welche sich bloss um einen constanten Factor unterscheiden, nicht als verschieden betrachtet werden, u_2 *das einzige Integral* von (B), dessen logarithmische Ableitung für $\lim t = +\infty$ den Grenzwerth α_2 besitzt.

Um dies zu beweisen, setzen wir

$$u = u_2 \int w\,dt,$$

wodurch die Differentialgleichung (B), wenn vorübergehend $2^p = r$ gesetzt wird, in

$$L_0 \frac{d^{r-1}w}{dt^{r-1}} + L_1 \frac{d^{r-2}w}{dt^{r-2}} + \ldots + L_{r-1} w = 0$$

übergeht; dabei ist

$$L_0 = Q_0,$$

$$L_\lambda = (r)_\lambda Q_0 \frac{u_2^{(\lambda)}}{u_2} + (r-1)_{\lambda-1} Q_1 \frac{u_2^{(\lambda-1)}}{u_2} + \ldots + Q_{\lambda-1} \frac{u_2'}{u_2} + Q_\lambda. \qquad (\lambda = 1, \ldots, r-1)$$

Aus

$$\lim \frac{u_2'}{u_2} = \alpha_2$$

[1] Der Integrationsweg l_1 muss dabei dem Punkt a_2 ausweichen.

[2] Poincaré, Am. Journ., Bd. 7.

folgt

$$\lim \frac{u_2^{(\lambda)}}{u_2} = \alpha_2^\lambda,$$

also

$$l_\lambda = \lim L_\lambda = (r)_\lambda b_0 \alpha_2^\lambda + (r-1)_{\lambda-1} b_1 \alpha_2^{\lambda-1} + \ldots .$$

Die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung für w

$$l_0 \gamma^{r-1} + l_1 \gamma^{r-2} + \ldots = 0$$

oder

$$b_0(\gamma + \alpha_2)^{r-1} + b_1(\gamma + \alpha_2)^{r-2} + \ldots = 0$$

hat als Wurzeln die um α_2 verminderten Wurzeln

$$\alpha_1\,,\ \frac{(p-1)\alpha_1 + \alpha_2}{p}\,,\ \ldots\,,\ \frac{\alpha_1 + (p-1)\alpha_2}{p}$$

der charakteristischen Gleichung von (B) im ursprünglichen Vielfachheitsgrad, also lauter reelle positive Wurzeln. Es ist also

$$\lim \frac{d \log w}{dt}$$

für jedes Integral w reell und positiv. Wäre ein von u_2 verschiedenes Integral $\bar{u}_2$ von (B) mit

$$\lim \frac{d \log \bar{u}_2}{dt} = \alpha_2$$

vorhanden, so wäre

$$\lim \frac{d \log \frac{\bar{u}_2}{u_2}}{dt} = 0.$$

Wenn man

$$\frac{d \log \frac{\bar{u}_2}{u_2}}{dt} = \varphi(t)$$

setzt, so lässt sich nach Angabe einer beliebig kleinen positiven Grösse

ε eine positive Zahl t_0 so angeben, dass für $t \geqq t_0$ $|\varphi(t)| < \varepsilon$ ist. Es ist also

$$\frac{d\frac{\bar{u}_2}{u_2}}{dt} = C\varphi(t)e^{\int_{t_0}^{t}\varphi(t)dt},$$

wo C eine Constante ist. Zu $u = \bar{u}_2$ gehört $w = \bar{w}$

$$\bar{w} = \frac{d\frac{\bar{u}_2}{u_2}}{dt},$$

und da

$$\lim \frac{d \log \bar{w}}{dt}$$

reell und positiv ist, so ist ein positive Grösse h so vorhanden, dass für $t \geqq t_0$

$$|\bar{w}| > e^{ht}$$

ist. Es ist also für $t \geqq t_0$

$$\begin{aligned} e^{ht} &< \left| C\varphi(t)e^{\int_{t_0}^{t}\varphi(t)dt} \right| \\ &< |C|\varepsilon e^{\varepsilon(t-t_0)}, \end{aligned}$$

was nicht möglich ist.

Wie ich im 118. Bd. von Crelles Journal gezeigt habe, besitzt die Differentialgleichung (A) *ein einziges Integral* η,[1] für welches für $\lim x = +\infty$

$$\lim x^{-(p-1)} \frac{d \log \eta}{dx} = \alpha_2$$

ist; ebenso ist für ein einziges Integral η_λ von (A_λ)

$$\lim x^{-(p-1)} \frac{d \log \eta_\lambda}{dx} = \alpha_2.$$

Wegen $x^p = t$ ist also für $\lim t = +\infty$

$$\lim \frac{d \log (\eta\eta_1 \ldots \eta_{p-1})}{dt} = \alpha_2.$$

[1] Immer von einem constanten Factor abgesehen.

Da $\eta\eta_1 \ldots \eta_{p-1}$ ein Integral von (B) ist, so muss sein:

$$u_2 = \eta\eta_1 \ldots \eta_{p-1}.$$

Durch wiederholte Differentiation dieser Gleichung und Berücksichtigung von (A) und (A_λ) erhält man Gleichungen von der Form [1]

$$\frac{d^\lambda u_2}{dx^\lambda} - A_{\lambda 0} u_2 = A_{\lambda 1} \frac{d\eta}{dx} \eta_1 \ldots \eta_{p-1} + \ldots + A_{\lambda, 2^p-1} \frac{d\eta}{dx} \frac{d\eta_1}{dx} \ldots \frac{d\eta_{p-1}}{dx},$$

$$(\lambda = 1, \ldots, 2^p)$$

wo $A_{\lambda 0}, A_{\lambda 1}, \ldots, A_{\lambda, 2^p-1}$ rationale Functionen von x sind. Da die Differentialgleichung (B) durch Elimination der $2^p - 1$ Producte $\frac{d\eta}{dx}\eta_1 \ldots \eta_{p-1}, \ldots$ aus diesen 2^p Gleichungen entsteht, so ist

$$Q_0 = |A_{\lambda\mu}|. \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, 2^p-1)$$

Wenn der bisherigen Annahme gemäss Q_0 nicht identisch verschwindet, so lässt sich aus den $2^p - 1$ ersten Gleichungen $\frac{d\eta}{dx}\eta_1 \ldots \eta_{p-1}$ in der Form berechnen:

$$\frac{d\eta}{dx}\eta_1 \ldots \eta_{p-1} = \sum_{\lambda=0}^{2^p-1} F_\lambda \frac{d^\lambda u_2}{dx^\lambda},$$

wo F_λ eine rationale Function von x ist. In Verbindung mit

$$u_2 = \eta\eta_1 \ldots \eta_{p-1}$$

ergiebt sich

$$\frac{d \log \eta}{dx} = \sum_{\lambda=0}^{2^p-1} F_\lambda \frac{1}{u_2} \frac{d^\lambda u_2}{dx^\lambda}.$$

Setzt man hierin für u_2 die asymptotische Reihe T_2, so erhält man hieraus die asymptotische Gleichung [2]

$$\eta \sim S_2$$

für den Fall, dass x als reelle positive Grösse ins Unendliche geht.

---

[1] Poincaré, Acta math., Bd. 8.

[2] Acta math. Bd. 8, S. 338–342.

Man kann aber, und das ist für die Erforschung des Verhaltens der Integrale von (A) wesentlich, ohne Mühe einen Schritt weiter gehen. Falls der geradlinige Theil des Integrationsweges l_2 von

$$u_2 = \int_{l_2} v_2 e^{tz} dz$$

in der negativen reellen Axe verläuft, definirt das Integral die Function u_2 in der Nähe von $t = \infty$ für

$$-\frac{\pi}{2} < \arg t < \frac{\pi}{2}.$$

Man kann aber den geradlinigen Theil von l_2 um weniger als π in positivem und um weniger als π in negativem Sinn drehen, ohne dass derselbe einen der auf der reellen Axe gelegenen singulären Punkte

$$a_1\,,\; \frac{(p-1)a_1 + a_2}{p}\,,\; \ldots\,,\; \frac{a_1 + (p-1)a_2}{p}$$

der Function v_2 überschreitet, so dass der Werth von $\arg z$ am Anfang von l_2 zwischen $-\pi$ und π variirt. Da das Integral einen Sinn behält, so lange $\arg t$ von $\pi - \arg z$ um weniger als $\frac{\pi}{2}$ nach der einen oder anderen Seite abweicht, so ist die Function u_2 in der Nähe von $t = \infty$ durch den Integralausdruck für

$$-\frac{3\pi}{2} < \arg t < \frac{3\pi}{2}$$

definirt, ohne dass der geradlinige Theil des Integrationsweges abgesehen von der Drehung deformirt werden muss. In den Math. Ann.[1] habe

[1] Im 49. Bd. führe ich die Untersuchung für die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten und im 50. Bd. für eine beliebige lineare Differentialgleichung vom Rang 1 mit rationalen Coefficienten unter der Voraussetzung, dass die Wurzeln der charakteristischen Gleichung verschieden sind. Aber auch für die Differentialgleichung (B) bleibt die ganze Entwickelung bestehen, soweit es sich um die Integrale u_1 und u_2 handelt, deren Integrationswege l_1, l_2 die *einfachen* Wurzeln a_1 und a_2 der charakteristischen Gleichung umkreisen. A. a. O. habe ich allerdings ganzzahlige Werthe von λ_i nicht berücksichtigt; dass aber der ausgesprochene Satz allgemein gilt, ersieht man, wenn man die von Herrn POINCARÉ (Acta math. Bd. 8, S. 310—314) gemachten Bemerkungen mit der Entwickelung in den Math. Ann. verbindet.

ich gezeigt, dass, wenn δ eine beliebig kleine positive Grösse bedeutet, die asymptotische Gleichung

$$u_2 \sim T_2$$

in der Nähe von $t = \infty$ gleichmässig für

$$-\frac{3\pi}{2} + \delta < \arg t < \frac{3\pi}{2} - \delta$$

besteht; d. h. wenn man, nachdem ein beliebiger Werth von n gewählt ist,

$$u_2 = e^{a_2 t} t^{\rho_2} \left(\sum_{\mu=0}^{n} \frac{D_{2\mu}}{t^\mu} + \frac{\delta_n}{t^n} \right)$$

setzt, so lässt sich nach Angabe einer beliebig kleinen positiven Grösse ε eine positive Grösse R so bestimmen, dass für

$$|t| > R\,, \quad -\frac{3\pi}{2} + \delta < \arg t < \frac{3\pi}{2} - \delta$$

$$|\delta_n| < \varepsilon$$

ist.[1] Wenn $x = t^{\frac{1}{p}}$ gesetzt und einem reellen positiven Werth von t der reelle positive Werth von x zugeordnet wird, so geht das Gebiet $-\frac{3\pi}{2} < \arg t < \frac{3\pi}{2}$ in $-\frac{3\pi}{2p} < \arg x < \frac{3\pi}{2p}$ über. Demnach besteht in der Nähe von $x = \infty$ die asymptotische Gleichung

$$\eta \sim S_2$$

gleichmässig für

$$-\frac{3\pi}{2p} + \delta < \arg x < \frac{3\pi}{2p} - \delta;$$

d. h. wenn man

$$\eta = e^{\frac{a_2 x^p}{p} + \dots} x^{\rho_2} \left(\sum_{\mu=0}^{n} \frac{C_{2\mu}}{x^\mu} + \frac{\gamma_n}{x^n} \right)$$

---

[1] In demselben Sinn bestehen die asymptotischen Gleichungen

$$\frac{du_2}{dt} \sim \frac{dT_2}{dt} \quad \text{u. s. w.}$$

setzt, so ist nach Angabe einer beliebigen positiven Grösse ε eine positive Grösse R so vorhanden, dass $|\gamma_n| < \varepsilon$ ist für

$$|x| > R\,,\quad -\frac{3\pi}{2p} + \delta < \arg x < \frac{3\pi}{2p} - \delta.$$

Wir zerlegen nun die Umgebung von $x = \infty$ in die $2p$ Gebiete $G^{(\rho)}$ $(\rho = 0, 1, \ldots, 2p - 1)$

$$\frac{(2\rho - 1)\pi}{2p} < \arg x < \frac{(2\rho + 1)\pi}{2p}.$$ [1]

Geht x mit einem dem Gebiet $G^{(2\nu)}$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ angehörenden Argument ins Unendliche,[2] so ist für ein einziges Integral $\eta^{(2\nu)}$ der Differentialgleichung (A)

$$\lim x^{-(p-1)} \frac{d \log \eta^{(2\nu)}}{dx} = \alpha_2$$ [3]

und es besteht wie oben die Beziehung

$$\frac{d \log \eta^{(2\nu)}}{dx} = \sum_{\lambda=0}^{2p-1} F_\lambda \frac{1}{u_2} \frac{d^\lambda u_2}{dx^\lambda},$$

woraus man schliesst, dass die asymptotische Gleichung $\eta^{(2\nu)} \sim S_2$ in der Nähe von $x = \infty$ gleichmässig für

$$\frac{(4\nu - 3)\pi}{2p} + \delta < \arg x < \frac{(4\nu + 3)\pi}{2p} - \delta$$

gilt. Dabei ist u_2 dieselbe Function von $t = x^p$ wie vorhin; es wird nur einem reellen positiven Werth von t der durch $\arg x = \dfrac{2\nu\pi}{p}$ bestimmte Werth von x zugeordnet.

---

[1] Das Gebiet

$$\frac{(2\rho - 1)\pi}{2p} + \delta < \arg x < \frac{(2\rho + 1)\pi}{2p} - \delta$$

werde mit $\overline{G}^{(\rho)}$ bezeichnet.

[2] Vgl. Crelles Journ. Bd. 118, S. 267.

[3] Die bisher mit η bezeichnete Function heisst jetzt $\eta^{(0)}$.

Wenn x im Gebiet $G^{(2\nu+1)}$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ ins Unendliche geht, besitzt (A) ein einziges Integral $\eta^{(2\nu+1)}$, für welches

$$\lim x^{-(p-1)} \frac{d \log \eta^{(2\nu+1)}}{dx} = \alpha_1$$

ist. Nehmen wir etwa $\arg x = \frac{(2\nu + 1)\pi}{p}$, so ist $\arg t = \pi$. Die Differentialgleichung (B) besitzt nur das eine Integral u_1, für welches

$$\lim \frac{d \log u_1}{dt} = \alpha_1$$

ist, wenn t als negative reelle Grösse ins Unendliche geht. Dieselben Schlüsse wie oben führen auf die Gleichung

$$\frac{d \log \eta^{(2\nu+1)}}{dx} = \sum_{\lambda=0}^{2p-1} F_\lambda \frac{1}{u_1} \frac{d^\lambda u_1}{dx^\lambda},$$

woraus man schliesst, dass die asymptotische Gleichung

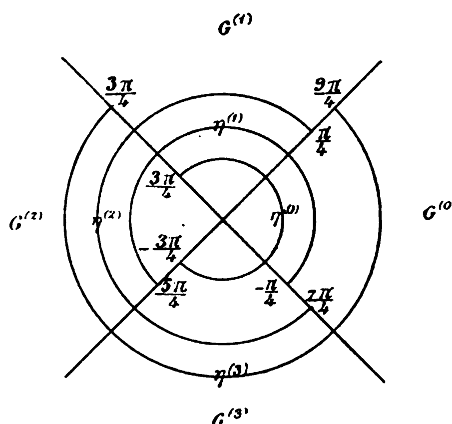
$$\eta^{(2\nu+1)} \sim S_1$$

in der Nähe von $x = \infty$ gleichmässig für

$$\frac{(2\nu - 1)\pi}{2p} + \delta < \arg x < \frac{(2\nu + 5)\pi}{2p} - \delta$$

besteht.

Wenn x in einem der $2p$ Gebiete $G^{(0)}, G^{(1)}, \ldots, G^{(2p-1)}$ ins Unendliche geht, strebt die logarithmische Ableitung des allgemeinen Integrals von (A) bezw. dem Grenzwerth $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_2$ zu; es entspricht aber jedem der $2p$ Gebiete ein bis auf einen constanten Factor vollständig bestimmtes particuläres Integral $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(2p-1)}$, dessen logarithmische Ableitung den Grenzwerth α_2 oder α_1 hat, je nachdem der Grenzwerth der logarithmischen Ableitung des allgemeinen Integrals in dem betreffenden Gebiet α_1 oder α_2 ist. Das Integral $\eta^{(2\nu)}$ wird in dem aus $G^{(2\nu-1)}$, $G^{(2\nu)}$, $G^{(2\nu+1)}$ zusammengesetzten Gebiet durch die Reihe S_2, das Integral $\eta^{(2\nu+1)}$ in dem aus $G^{(2\nu)}$, $G^{(2\nu+1)}$, $G^{(2\nu+2)}$ zusammengesetzten Gebiet durch die Reihe S_1 asymptotisch dargestellt.



In der beigegebenen Figur, welche dem Rang $p = 2$ entspricht, bezeichnen die Buchstaben $\eta^{(0)}$ und $\eta^{(2)}$ die Gültigkeitsgebiete der asymptotischen Gleichungen $\eta^{(0)} \sim S_2$ und $\eta^{(2)} \sim S_2$, die Buchstaben $\eta^{(1)}$ und $\eta^{(3)}$ die Gültigkeitsgebiete der asymptotischen Gleichungen $\eta^{(1)} \sim S_1$ und $\eta^{(3)} \sim S_1$. Wenn beide Grenzen eines Gebietes beliebig wenig verengert werden, gilt die betreffende asymptotische Gleichung gleichmässig. An die Endpunkte des Bogens $\eta^{(\rho)}$ sind die Argumente gesetzt, durch deren Angabe die in S_1 und S_2 enthaltenen Potenzen x^{ρ_1} bezw. x^{ρ_2} in jedem Fall fixirt sind.

Bei beliebigem Rang p bilden wir im Gebiet $G^{(\rho)}$ ein Fundamentalsystem von (A) aus dem Integral $\eta^{(\rho)}$ und dem aus $G^{(\rho+1)}$ über die Gerade $\arg x = \frac{(2\rho + 1)\pi}{2p}$ nach $G^{(\rho)}$ fortgesetzten Integral $\eta^{(\rho+1)}$ (oder aus $\eta^{(\rho)}$ und dem aus $G^{(\rho-1)}$ über $\arg x = \frac{(2\rho - 1)\pi}{2p}$ nach $G^{(\rho)}$ fortgesetzten Integral $\eta^{(\rho-1)}$). Dann ist in $G^{(2\nu)}$

$$\eta^{(2\nu)} \sim S_2, \quad \eta^{(2\nu+1)} \sim S_1$$

und, wenn b von Null verschieden ist,

$$y = a\eta^{(2\nu)} + b\eta^{(2\nu+1)} \sim bS_1;$$ [1]

---

[1] Es ist

$$y = be^{\frac{a_1 x^p}{p} + \cdots} x^{\rho_1}\left(C_1 + \frac{C_{11}}{x} + \ldots + \frac{C_{1n}}{x^n} + \frac{\gamma_n}{x^n}\right) + ae^{\frac{a_2 x^p}{p} + \cdots} x^{\rho_2}(C_2 + \gamma)$$

$$= be^{\frac{a_1 x^p}{p} + \cdots} x^{\rho_1}\left(C_1 + \frac{C_{11}}{x} + \ldots + \frac{C_{1n}}{x^n} + \frac{\delta_n}{x^n}\right),$$

bei ungeradem ρ durch die Reihe S_1, bei geradem ρ durch die Reihe S_2 gleichmässig asymptotisch dargestellt wird.[1]

Dass der Satz auch in denjenigen (darin nicht erwähnten) Ausnahmefällen gilt, welche in diesem Paragraphen ausgeschlossen worden sind, wird im nächsten Paragraphen gezeigt werden.

§ 2.

Die bisherige Annahme, dass die Determinante Q_0, welche den ersten Coefficienten der Differentialgleichung (B) bildet, von Null verschieden sei, lassen wir jetzt fallen.

Da die 2^p Reihen

$$S_{\lambda_0}\left(t^{\frac{1}{p}}\right) S_{\lambda_1}\left(\varepsilon t^{\frac{1}{p}}\right) \dots S_{\lambda_{p-1}}\left(\varepsilon^{p-1} t^{\frac{1}{p}}\right)$$

mindestens $p + 1$ verschiedene Exponentialfactoren

$$e^{a_1 t}, \; e^{\frac{(p-1)a_1+a_2}{p}t+\dots}, \; \dots, \; e^{a_2 t}$$

enthalten, so ist die Anzahl der verschiedenen Reihen mindestes $p + 1$, und die Ordnung der Differentialgleichung, welcher u genügt, kann nicht geringer als $p + 1$ sein. Für

$$u = y y_1 \dots y_{p-1}$$

ergeben sich wie in § 1 die Gleichungen

$$u^{(\lambda)} - A_{\lambda 0} u = A_{\lambda 1} y' y_1 \dots y_{p-1} + \dots + A_{\lambda, 2^p-1} y' y_1' \dots y_{p-1}'$$

oder, wenn man durch u dividirt,

$$\frac{u^{(\lambda)}}{u} - A_{\lambda 0} = A_{\lambda 1} \frac{y'}{y} + \dots + A_{\lambda, 2^p-1} \frac{y'}{y} \frac{y_1'}{y_1} \dots \frac{y_{p-1}'}{y_{p-1}}. \qquad (\lambda=1,2,3,\dots)$$

Alle aus dem System

$$A_{\lambda 1}, \dots, A_{\lambda, 2^p-1} \qquad (\lambda=1,2,\dots,2^p-1)$$

gebildeten Determinanten r^{ten} Grades seien gleich Null, während eine De-

[1] Vgl. Fig. S. 184 für $p = 2$.

terminante $(r-1)^{\text{ten}}$ Grades von Null verschieden sei. Dann erhält man durch Elimination von $\frac{y'}{y}, \ldots$ aus r der angeschriebenen Gleichungen [1] für u eine lineare Differentialgleichung (B) mit rationalen Coefficienten deren Ordnung geringer als 2^p ist, und zwar ist diese Gleichung, wenn $t = x^p$ als unabhängige Veränderliche eingeführt wird, wie früher vom Rang 1, und ihre charakteristische Gleichung hat die Wurzeln α_1 und α_2 einfach, die Wurzeln $\frac{(p-1)\alpha_1 + \alpha_2}{p}$ u. s. w. einfach oder mehrfach.

Im Falle $p = 2$ folgen aus

$$u = yy_1$$

die Gleichungen

$$\begin{aligned} u' &= y'y_1 + yy_1', \\ u'' - A_0 u &= A_1 y'y_1 + A_2 yy_1' + 2y'y_1', \\ u''' - B_0 u &= B_1 y'y_1 + B_2 yy_1' + B_3 y'y_1', \end{aligned}$$

wo die A und B rationale Functionen von x sind. Wenn

$$Q_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ A_1 & A_2 & 2 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = 0$$

ist, genügt u der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\text{(B)} \qquad \begin{vmatrix} u' & , 1 & , 0 \\ u'' - A_0 u & , A_2 & , 2 \\ u''' - B_0 u & , B_2 & , B_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn man aus den Gleichungen

$$\frac{u'}{u} = \frac{y'}{y} + \frac{y_1'}{y_1},$$

$$\frac{u''}{u} - A_0 = A_1 \frac{y'}{y} + A_2 \frac{y_1'}{y_1} + 2 \frac{y'}{y}\frac{y_1'}{y_1}$$

---

[1] Vgl. die folgenden Beispiele.

$\frac{y_1'}{y_1}$ eliminirt, erhält man für $\frac{y'}{y}$ die quadratische Gleichung

$$2\left(\frac{y'}{y}\right)^2 - \left(2\frac{u'}{u} + A_1 - A_2\right)\frac{y'}{y} + \left(\frac{u''}{u} - A_2\frac{u'}{u} - A_0\right) = 0,$$

welche unabhängig vom Verschwinden der Determinante Q_0 besteht. Wenn $Q_0 = 0$ ist, entsprechen einem beliebigen Integral u von (B) zwei Integrale y von (A), deren logarithmische Ableitungen der quadratischen Gleichung genügen.[1] Im Falle $Q_0 \neq 0$ gehört nur zu gewissen Integralen u von (B) ein Integral y von (A) und zwar ein einziges, dessen logarithmische Ableitung der quadratischen Gleichung genügt, aber auch wie früher rational durch $\frac{u'}{u}, \frac{u''}{u}, \frac{u'''}{u}$ ausgedrückt werden kann.

Im Falle $p = 3$ folgen aus

$$u = yy_1y_2$$

die Gleichungen

$$\frac{u'}{u} = \frac{y'}{y} + \frac{y_1'}{y_1} + \frac{y_2'}{y_2},$$

$$\frac{u''}{u} - A_0u = A_1\frac{y'}{y} + A_2\frac{y_1'}{y_1} + A_3\frac{y_2'}{y_2} + 2\left(\frac{y'}{y}\frac{y_1'}{y_1} + \frac{y'}{y}\frac{y_2'}{y_2} + \frac{y_1'}{y_1}\frac{y_2'}{y_2}\right),$$

$$\frac{u'''}{u} - B_0u = B_1\frac{y'}{y} + \dots + B_4\frac{y'}{y}\frac{y_1'}{y_1} + \dots + 6\frac{y'}{y}\frac{y_1'}{y_1}\frac{y_2'}{y_2},$$

$$\frac{u^{(4)}}{u} - C_0u = C_1\frac{y'}{y} + \dots + C_4\frac{y'}{y}\frac{y_1'}{y_1} + \dots + C_7\frac{y'}{y}\frac{y_1'}{y_1}\frac{y_2'}{y_2}.$$

Wenn z. B. alle Determinanten vierten Grades aus den Coefficienten auf der rechten Seite verschwinden, genügt u der linearen Differentialgleichung vierter Ordnung

$$\text{(B)} \qquad \begin{vmatrix} \frac{u'}{u} & , 1 , & 0 , & 0 \\ \frac{u''}{u} - A_0 , & A_1 , & 2 , & 0 \\ \frac{u'''}{u} - B_0 , & B_1 , & B_4 , & 6 \\ \frac{u^{(4)}}{u} - C_0 , & C_1 , & C_4 , & C_7 \end{vmatrix} = 0.$$

[1] Dabei sind constante Factoren von y und u als unwesentlich angesehen.

Ist der Rang p beliebig, so bestehen, welches auch die Ordnung von (B) sein mag, Gleichungen von der Form

$$\frac{u^{(\lambda)}}{u} - A_{\lambda 0} = \ldots + \underline{|\lambda} \sum \frac{y'}{y} \frac{y_1'}{y_1} \ldots \frac{y_{\lambda-1}'}{y_{\lambda-1}}, \qquad (\lambda = 1, \ldots, p)$$

wo

$$\sum \frac{y'}{y} \frac{y_1'}{y_1} \ldots \frac{y_{\lambda-1}'}{y_{\lambda-1}}$$

die Summe von je λ Producten der p Grössen

$$\frac{y'}{y}, \frac{y_1'}{y_1}, \ldots, \frac{y_{p-1}'}{y_{p-1}}$$

bedeutet, während an Stelle der Punkte Ausdrücke stehen, deren Dimension in diesen Grössen geringer als λ ist. Durch Elimination von

$$\frac{y_1'}{y_1}, \ldots, \frac{y_{p-1}'}{y_{p-1}}$$

aus diesen p Gleichungen erhält man in allen Fällen eine Gleichung von der Form

$$\sum_{\nu} L_{\nu}(u) \left(\frac{y'}{y}\right)^{\nu} = 0,$$

deren Coefficienten L_{ν} von $\frac{u'}{u}, \frac{u''}{u}, \ldots$ und von x rational abhängen und nicht sämmtlich identisch verschwinden. Setzt man hierin für u ein Integral von (B), welches die Form $yy_1 \ldots y_{p-1}$ hat, so genügt jedes Integral y von (A), aus welchem die angenommene Function u durch Multiplication mit geeigneten Integralen $y_1, \ldots, y_{p-1}$ von $(A_1), \ldots, (A_{p-1})$ hervorgeht, der angegebenen algebraischen Gleichung, wenn auch nicht umgekehrt jede Wurzel dieser Gleichung die logarithmische Ableitung eines Integrals y von (A) zu sein braucht.

Wir schalten den folgenden Hilfssatz ein:

Wenn die Coefficienten der algebraischen Gleichung

$$G(z) = \sum_{\lambda} A_{\lambda} z^{\lambda} = 0$$

Functionen von x sind, welche in der Nähe von $x = \infty$ für $\omega_1 < \arg x < \omega_2$

durch Potenzreihen von $\frac{1}{x}$ gleichmässig asymptotisch dargestellt werden, so wird jede Wurzel z durch eine der die Gleichung formell befriedigenden Potenzreihen von $\frac{1}{x}$ (oder von $\frac{1}{x^{\frac{1}{m}}}$[1]) in dem bezeichneten Gebiet gleichmässig asymptotisch dargestellt.

Es sei

$$A_\lambda = A_{\lambda n} + \frac{\alpha_{\lambda n}}{x^n} = a_{\lambda 0} + \frac{a_{\lambda 1}}{x} + \ldots + \frac{a_{\lambda n}}{x^n} + \frac{\alpha_{\lambda n}}{x^n},$$

wo $\alpha_{\lambda n}$ für $\omega_1 < \arg x < \omega_2$ gleichmässig zur Grenze Null convergirt. Irgend eine Wurzel z erscheint als algebraische Function von $\frac{1}{x}$ und den $\alpha_{\lambda n}$, wenn die $\alpha_{\lambda n}$ vorübergehend neben $\frac{1}{x}$ als unabhängige Veränderliche aufgefasst werden. Durch Nullsetzen der $\alpha_{\lambda n}$ geht z in eine Wurzel z_n der Gleichung

$$\sum_\lambda A_{\lambda n} z_n^\lambda = 0$$

über, welche sich als Potenzreihe von $\frac{1}{x}$[1] darstellen lässt:

$$z_n = c_0 + \frac{c_1}{x} + \ldots + \frac{c_n}{x^n} + \frac{\gamma_{n+1}}{x^{n+1}} + \frac{\gamma_{n+2}}{x^{n+2}} + \ldots.$$

Wenn man

$$z = c_0 + \frac{c_1}{x} + \ldots + \frac{c_n}{x^n} + \frac{\zeta_n}{x^n}$$

setzt, ist ζ_n eine algebraische Function von $\frac{1}{x}$ und $\alpha_{\lambda n}$, welche für $\alpha_{\lambda n} = 0$ in

$$\frac{\gamma_{n+1}}{x} + \frac{\gamma_{n+2}}{x^2} + \ldots$$

übergeht, also für $\frac{1}{x} = 0$, $\alpha_{\lambda n} = 0$ verschwindet und in der Umgebung

---

[1] Durch eine Substitution $x = x'^\mu$ kann erreicht werden, dass keine gebrochenen Potenzen auftreten, und durch eine Substitution von der Form $y = x^m y'$, dass die Reihen keine positiven Potenzen von x enthalten. Im Beweis wird diese Voraussetzung der Einfachheit halber gemacht.

dieser Stelle stetig ist. Wenn x im Gebiet $\omega_1 < \arg x < \omega_2$ ins Unendliche geht, convergiren die $\alpha_{\lambda n}$ gleichmässig zur Grenze Null, so dass das Gleiche für ζ_n gilt. Durch die Reihe

$$z = c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots$$

wird die Gleichung $G(z) = 0$ formell befriedigt.

Wie in § 1 hat die Differentialgleichung (B) ein einziges Integral u_2 von der Eigenschaft, dass für $\lim t = +\infty$

$$\lim \frac{d \log u_2}{dt} = \alpha_2$$

ist; ebenso ist für ein einziges Integral η von (A)

$$\lim_{x=+\infty} x^{-(p-1)} \frac{d \log \eta}{dx} = \alpha_2$$

und für ein einziges Integral η_λ von (A_λ)

$$\lim x^{-(p-1)} \frac{d \log \eta_\lambda}{dx} = \alpha_2,$$

so dass wie in § 1

$$u_2 = \eta\eta_1 \dots \eta\eta_{p-1}$$

ist. Es erscheint daher

$$z = \frac{\eta'}{\eta}$$

als Wurzel der algebraischen Gleichung

$$(\alpha) \qquad \sum_\lambda L_\lambda(u_2) z^\lambda = 0.$$

Die Gleichung

$$(\alpha') \qquad \sum_\lambda L_\lambda(T_2) z^\lambda = 0,$$

welche man erhält, wenn man für u_2 die asymptotische Reihe T_2 setzt, wird durch die Reihe

$$z = \frac{d \log S_2}{dx}$$

formell befriedigt. Nach dem soeben bewiesenen Hilfssatze wird $\frac{\eta'}{\eta}$ als Wurzel von (α) durch eine der der Gleichung (α') formell genügenden Reihen mit unendlich vielen negativen und einer endlichen Anzahl potenzen von x (oder $x^{\frac{1}{m}}$) asymptotisch dargestellt; bezeichnet man diese Reihe mit $\frac{d \log \overline{S}}{dx}$, so ist $\overline{S}$ eine normale oder anormale Reihe. Aus der asymptotischen Gleichung $\eta \sim \overline{S}$ folgt, dass $\overline{S}$ der Gleichung (A) formell genügt, was nur möglich ist, wenn $\overline{S}$ mit S_2 identisch ist. Es ist also

$$\frac{\eta'}{\eta} \sim \frac{d \log S_2}{dx}$$

und

$$\eta \sim S_2.$$

Die sämmtlichen asymptotischen Gleichungen gelten zunächst, wenn x als reelle positive Grösse ins Unendliche geht. Nun gilt aber die asymptotische Gleichung

$$u_2 \sim T_2$$

gleichmässig für

$$-\frac{3\pi}{2} + \delta < \arg t < \frac{3\pi}{2} - \delta,$$

woraus die gleichmässige Gültigkeit der asymptotischen Gleichung

$$\eta \sim S_2$$

für

$$-\frac{3\pi}{2p} + \delta < \arg x < \frac{3\pi}{2p} - \delta$$

folgt.

Wir haben dasselbe Resultat wie in § 2. Die weiteren Schlüsse gestalten sich wie früher.

§ 3.

Wir wollen die asymptotische Darstellung der Integrale der Differentialgleichung (A) benutzen,[1] um über die Lage der *Nullstellen der Integrale in der Umgebung der Unbestimmtheitstelle* $x = \infty$ Aufschluss zu gewinnen.

Setzt man

$$\eta^{(\rho)} = e^{\frac{ax^p}{p}+\dots} x^{\rho}(C + \gamma),$$

wo die Grössen $\alpha, \dots, \rho$ und C mit dem Index 1 oder 2 zu versehen sind, je nachdem der Index ρ von η ungerade oder gerade ist, so lässt sich nach Angabe einer beliebig kleinen positiven Grösse ε ($|\varepsilon| < C$) eine positive Grösse r so bestimmen, dass für

$$|x| > r\,, \; \frac{(2\rho - 3)\pi}{2p} + \delta < \arg x < \frac{(2\rho + 3)\pi}{2p} - \delta$$

$|\gamma| < \varepsilon$ ist. Die Function $\eta^{(\rho)}$ ist demnach in dem bezeichneten Gebiet von Nullstellen frei.

Für ein beliebiges Integral

$$y = a\eta^{(0)} + b\eta^{(1)},$$

für welches im Gebiet $G^{(0)}$ die asymptotische Gleichung

$$y \sim bS_1$$

besteht, ist

$$y = be^{\frac{a_1x^p}{p}+\dots} x^{\rho_1}(C_1 + \gamma),$$

[1] Vgl. meine Arbeiten: *Verwendung asymptotischer Darstellungen zur Untersuchung der Integrale einer speciellen linearen Differentialgleichung* (Math. Ann. Bd. 49) und *Über das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle* (Crelles Journ. Bd. 120). Ich kann mich im gegenwärtigen Paragraphen kurz fassen, wo es sich um die Übertragung der in den genannten Arbeiten für die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten und die lineare, nicht homogene Differentialgleichung erster Ordnung entwickelten Methoden auf eine beliebige lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten handelt. Nach dem Muster der Arbeit im 49. Bd. der Math. Ann. liessen sich die jetzigen Entwickelungen weiter ausführen.

wo γ im verkleinerten Gebiet $\overline{G}^{(0)}$ gleichmässig zur Grenze Null convergirt. Das Integral y kann daher im Gebiet $\overline{G}^{(0)}$ keine Nullstellen besitzen, wenn $|x|$ hinreichend gross genommen wird.

Wenn also ein Integral y von (A) Nullstellen x_λ von der Art besitzt, dass für $\lim \lambda = \infty$ $|x_\lambda| = \infty$ ist, so muss sich $\arg x_\lambda$ einem der Grenzwerthe

$$\frac{(2\rho - 1)\pi}{2p} \qquad (\rho = 0, 1, 2, \ldots)$$

nähern. Die im Unendlichen befindlichen Nullstellen eines Integrals y können nur in unendlicher Nähe der Trennungslinien der Gebiete $G^{(0)}, G^{(1)}, \ldots$ liegen.

Betrachten wir z. B. die Gerade

$$\arg x = \frac{\pi}{2p},$$

so lässt sich das Integral

$$y = b\eta^{(0)} + a\eta^{(1)},$$

wenn a und b beide von Null verschieden sind, in der Form schreiben

$$y = ae^{\frac{a_1 x^p}{p} + \cdots} x^{\rho_1}(C_1 + \gamma_1) + be^{\frac{a_2 x^p}{p} + \cdots} x^{\rho_2}(C_2 + \gamma_2),$$

wo γ_1 und γ_2 im Gebiet

$$\frac{\pi}{2p} - \omega < \arg x < \frac{\pi}{2p} + \omega,$$

wo ω eine kleine positive Grösse bedeutet, gleichmässig zur Grenze Null convergiren; dasselbe gilt für δ_1 und δ_2, wenn wir

$$y = ae^{(a_1 + \delta_1)\frac{x^p}{p}}(C_1 + \gamma_1) + be^{(a_2 + \delta_2)\frac{x^p}{p}}(C_2 + \gamma_2)$$

setzen. Die Gleichung

$$y = 0$$

schreibt sich

$$e^{(a_1 - a_2 + \delta_1 - \delta_2)\frac{x^p}{p}} = -\frac{b}{a}\frac{C_2 + \gamma_2}{C_1 + \gamma_1}$$

oder

$$x = s_\lambda(1 + \varphi_\lambda),$$

wobei

$$s_\lambda = \sqrt[p]{\frac{p}{a_1 - a_2}\left(\log\left(-\frac{b}{a}\frac{C_2}{C_1}\right) + 2\lambda\pi i\right)}\ [1]$$

gesetzt ist und φ_λ eine Function von x bedeutet, welche gleichmässig zur Grenze Null geht, wenn x in dem oben bezeichneten Gebiet unendlich gross wird. Wir zeigen, unter ε eine beliebig kleine positive Grösse verstehend, dass ein mit dem Radius $\varepsilon|s_\lambda|$ um den Punkt $x = s_\lambda$ beschriebener Kreis K eine und nur eine Wurzel der Gleichung

$$x = s_\lambda(1 + \varphi_\lambda)$$

enthält, wenn λ hinreichend gross genommen wird. Das geschieht durch den Nachweis, dass für hinreichend grosse Werthe von λ

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K d\log(x - s_\lambda - s_\lambda\varphi_\lambda) = 1$$

ist, wenn der Kreisumfang K als Integrationsweg genommen wird, oder, was dasselbe ist, durch den Nachweis, dass

$$\int_K d\log(x - s_\lambda - s_\lambda\varphi_\lambda) - \int_K d\log(x - s_\lambda)$$
$$= \int_K \frac{s_\lambda(\varphi_\lambda - (x - s_\lambda)\varphi_\lambda')}{(x - s_\lambda)(x - s_\lambda - s_\lambda\varphi_\lambda)}dx$$

beliebig klein wird, wenn man λ hinreichend gross annimmt. Das letzte Integral ist dem absoluten Betrage nach kleiner als das Product aus dem Kreisumfang $2\pi\varepsilon|s_\lambda|$ und dem Maximum des zu integrirenden Bruches auf K. Der Zähler ist dem absoluten Betrage nach kleiner als $|s_\lambda|\varepsilon\eta$ (wo η eine beliebig kleine positive Grösse bedeutet), wenn man λ hinreichend gross wählt; da $|\varphi_\lambda|$ für hinreichend grosse Werthe von λ kleiner als $\eta\varepsilon$ ist, so ist der Nenner dem absoluten Betrage nach grösser als

$$\varepsilon|s_\lambda|(\varepsilon|s_\lambda| - |s_\lambda|\eta\varepsilon) = \varepsilon^2|s_\lambda|^2(1 - \eta).$$

[1] Dabei ist λ eine ganze positive Zahl; die Wurzel ist so fixirt, dass für

$$\lambda = +\infty \qquad \arg s_\lambda = \frac{\pi}{2p}$$

wird.

Der absolute Betrag unseres Integrals ist also kleiner als

$$2\pi\varepsilon\left|s_\lambda\right|\cdot\frac{|s_\lambda|\,\varepsilon\eta}{\varepsilon^2|\lambda_\lambda|^2(1-\eta)}=\frac{2\pi\eta}{1-\eta},$$

d. h. beliebig klein für hinreichend grosse Werthe von λ, w. z. b. w.

Das Integral hat also die Nullstellen

$$x_\lambda = s_\lambda(1+\varepsilon_\lambda), \qquad \lim\lambda = +\infty,$$

wo

$$\lim \varepsilon_\lambda = 0$$

ist.

Wir bringen nun den Begriff des Geschlechtes einer ganzen transcendenten Function und den Begriff des Ranges einer linearen Differentialgleichung an einer Unbestimmtheitsstelle in Verbindung. Wenn die zur singulären Stelle $x=\infty$ gehörige Fundamentalgleichung zwei verschiedene Wurzeln $e^{2\pi i\sigma_1}, e^{2\pi i\sigma_2}$ besitzt, hat man ein Fundamentalsystem von der Form

$$y_i = x^{\sigma_i}P_i(x), \qquad (i=1,2)$$

wo $P_i(x)$ eine nach positiven und negativen Potenzen von x fortschreitende, für hinreichend grosse Werthe von $|x|$ convergente Reihe ist. Eine der beiden Functionen $P_i(x)$, welche kurz $P(x)$ heissen möge, habe die Nullstellen $x_\lambda^{(\rho)}$ $(\rho=0,1,\ldots)$, wo

$$\lim_{\lambda=\infty}\arg x_\lambda^{(\rho)}=\frac{(2\rho-1)\pi}{2p}$$

ist. Bezeichnet man mit

$$\varepsilon_\nu \qquad (\nu=1,2,\ldots,\infty)$$

diejenigen Nullstellen, deren absoluter Betrag grösser als die beliebig zu wählende Grösse r ist, so ist, wie man aus den asymptotischen Ausdrücken für die Nullstellen ersieht, von den beiden Reihen

$$\sum_\nu\frac{1}{|\varepsilon_\nu|^p}, \quad \sum_\nu\frac{1}{|\varepsilon_\nu|^{p+1}}$$

die erste divergent, die zweite convergent. Das unendliche Product

$$\Pi(x)=\prod_\nu\left(1-\frac{x}{\varepsilon_\nu}\right)e^{\frac{x}{\varepsilon_\nu}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\varepsilon_\nu}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{x}{\varepsilon_\nu}\right)^p}$$

ist daher für jeden endlichen Werth von x convergent. Dann ist

$$F(x) = \frac{P(x)}{\Pi(x)}$$

für $|x| > r$ von Nullstellen frei, so dass eine für $|x| > r$ convergente Entwickelung von der Form

$$\frac{d \log F(x)}{dx} = \frac{\mu}{x} + \frac{dg(x)}{dx} + \frac{d\mathfrak{P}_0\left(\frac{1}{x}\right)}{dx}$$

besteht, wo $g(x)$ eine nach positiven Potenzen von x fortschreitende, beständig convergente Reihe und $\mathfrak{P}_0\left(\frac{1}{x}\right)$ eine für $|x| > r$ convergente Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ darstellt. Es ist also

$$F(x) = x^\mu e^{g(x)} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right),$$

wo μ eine positive oder negative ganze Zahl und

$$\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) = Ce^{\mathfrak{P}_0\left(\frac{1}{x}\right)}$$

eine Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ ist, welche für $|x| > r$ von Nullstellen frei ist. Wir haben demnach

$$y = x^\sigma P(x) = x^{\sigma+\mu} e^{g(x)} \Pi(x) \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Mit Benutzung unserer asymptotischen Darstellungen und eines Satzes von Herrn HADAMARD[1] zeigt man, dass $g(x)$ eine ganze rationale Function ist, deren Grad nicht grösser als p sein kann, so dass

$$G(x) = e^{g(x)} \Pi(x)$$

eine ganze Function vom Geschlecht p ist. Wenn wir unserem Integral

$$y = x^{\sigma+\mu} G(x) \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$$

den Rang p an der singulären Stelle $x = \infty$ beilegen, so stellt sich der

---

[1] Liouv. Journ. 1893.

Begriff des Ranges als Verallgemeinerung des von LAGUERRE eingeführten Begriffs des Geschlechtes einer ganzen transcendenten Function dar.

Die Hauptergebnisse dieses Paragraphen mögen in der Satz zusammengefasst werden:

Das ausgezeichnete Integral $\eta^{(\rho)}$ *von* (A) *besitzt für*

$$\frac{(2\rho-3)\pi}{2p}+\delta<\arg x<\frac{(2\rho+3)\pi}{2p}-\delta\ [1]$$

keine Nullstelle, deren absoluter Betrag eine gewisse Grenze übersteigt. Ein beliebiges Integral y *besitzt in der Umgebung von* $x=\infty$ *unendlich viele Nullstellen* $x_\lambda^{(\rho)}$ *von der Art, dass für* $\lim\lambda=\infty$

$$\lim|x_\lambda^{(\rho)}|=\infty,\qquad \lim\arg x_\lambda^{(\rho)}=\frac{(2\rho-1)\pi}{2p}$$

ist. Es ist z. B. für $y=b\eta^{(0)}+a\eta^{(1)}$

$$x_\lambda^{(1)}=\sqrt[p]{\frac{a_1-a_2}{p}\left(\log\left(-\frac{b}{a}\frac{C_2}{C_1}\right)+2\lambda\pi i\right)}\cdot(1+\varepsilon_\lambda),$$

$$\lim_{\lambda=\infty}\varepsilon_\lambda=0.$$

Ist

$$y_i=x^{a_i}P_i(x)\qquad (i=1,2)$$

das zu $x=\infty$ *gehörige kanonische Fundamentalsystem von* (A), *so ist die Laurent'sche Reihe* $P_i(x)$ *von der Form*

$$P(x)=x^\mu G(x)\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right),$$

wo $G(x)$ *eine ganze (transcendente) Function vom Geschlecht* p *ist, welche diejenigen Nullstellen von* y_i *besitzt, deren absoluter Betrag grösser als* r *(*r *beliebig) ist, während* μ *eine ganze Zahl und* $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ *eine für* $|x|>r$ *nicht verschwindende Potenzreihe von* $\frac{1}{x}$ *darstellt.*

[1] λ ist eine beliebig kleine positive Grösse.

§ 4.

Wir lassen jetzt die in § 1 gemachte Voraussetzung, dass die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von (A)

$$\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$$

verschieden seien, fallen.

Ist α eine Doppelwurzel, so wird die Gleichung (A) durch die Substitution

$$y = e^{\frac{\alpha x^p}{p}} z$$

übergeführt in

$$P_0 \frac{d^2z}{dx^2} + (P_1 + 2\alpha x^{p-1} P_0) \frac{dz}{dx}$$

$$+ (P_2 + \alpha x^{p-1} P_1 + (\alpha^2 x^{2p-2} + (p-1)\alpha x^{p-2}) P_0) z = 0$$

oder wegen $\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$, $2\alpha + a_1 = 0$ in

$$(x^m + \ldots)\frac{d^2z}{dx^2} + (b_1' x^{m+p-2} + \ldots)\frac{dz}{dx} + (b_2' x^{m+2p-3} + b_2'' x^{m+2p-4} + \ldots) z = 0.$$

Ist b_2' von Null verschieden, so führt die Substitution

$$x = t^2$$

auf die Differentialgleichung

$$(t^{2m+1} + \ldots)\frac{d^2z}{dt^2} + (0 \,.\, t^{(2m+1)+2p-2} + \ldots)\frac{dz}{dt} + (4b_2' t^{(2m+1)+4p-4} + \ldots) z = 0$$

vom Rang $2p-1$ mit der charakteristischen Gleichung

$$\beta^2 + 4b_2' = 0,$$

deren Wurzeln β_1 und $\beta_2 = -\beta_1$ zwei Normalreihen

$$T_i = e^{\frac{\beta_i t^{2p-1}}{2p-1} + \frac{\beta_{i1} t^{2p-2}}{2p-2} + \ldots} t^{\rho_i}\left(C_i + \frac{C_{i1}}{t} + \ldots\right) \qquad (i=1,2)$$

entsprechen. Daraus ergeben sich für die Differentialgleichung (A) zwei anormale Reihen von der Form

$$S_i = e^{\frac{ax^p}{p} + \frac{\beta_i x^{\frac{2p-1}{2}}}{2p-1} + \frac{\beta_{i1} x^{\frac{2p-2}{2}}}{2p-2} + \cdots} x^{\frac{\rho_i}{2}} \left(C_i + \frac{C_{i1}}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{C_{i2}}{x} + \cdots \right). \qquad (i=1,2)$$

Im Fall $b_2' = 0$ haben wir die Differentialgleichung vom Rang $p-1$

$$(x^m + \ldots)\frac{d^2z}{dx^2} + (b_1' x^{m+p-2} + \ldots)\frac{dz}{dx} + (b_2'' x^{m+2p-4} + \ldots) z = 0$$

mit der charakteristischen Gleichung

$$\beta^2 + b_1'\beta + b_2'' = 0.$$

Wir erhalten zwei Normalreihen vom Rang $p-1$, wenn die Wurzeln dieser Gleichung verschieden sind, während im Fall einer Doppelwurzel $\beta = \alpha_1$ die Substitution

$$z = e^{\frac{\alpha_1 x^{p-1}}{p-1}} z_1$$

angewandt wird. Nehmen wir an, man müsse l-mal nach einander eine solche Substitution anwenden, bis man auf eine Differentialgleichung stösst, welche unmittelbar oder nach Anwendung der Substitution $x = t^2$ durch Normalreihen befriedigt wird. Man hat dann

$$y = e^{\frac{ax^p}{p} + \frac{\alpha_1 x^{p-1}}{p-1} + \cdots + \frac{\alpha_{l-1} x^{p-l+1}}{p-l+1}} z,$$

und die Differentialgleichung für z wird entweder durch zwei Normalreihen

$$T_i = e^{\frac{\beta_i x^{p-l}}{p-l} + \frac{\beta_{i1} x^{p-l-1}}{p-l-1} + \cdots} x^{\rho_i}\left(C_i + \frac{C_{i1}}{x} + \cdots\right) \qquad (i=1,2)$$

oder durch zwei anormale Reihen

$$T_i = e^{\frac{\beta_i x^{\frac{2p-2l+1}{2}}}{2p-2l+1} + \frac{\beta_{i1} x^{p-l}}{2p-2l} + \cdots} x^{\frac{\rho_i}{2}}\left(C_i + \frac{C_{1i}}{x^{\frac{1}{2}}} + \cdots\right) \qquad (i=1,2)$$

formell befriedigt. Aus der Differentialgleichung (A) erhält man demnach Reihen von der Form

$$S_i = e^{\frac{ax^p}{p} + \frac{a_1 x^{p-1}}{p-1} + \ldots + \frac{a_{l-1} x^{p-l+1}}{p-l+1} + \frac{\beta_l x^{p-l}}{p-l} + \frac{\beta_{l1} x^{p-l-1}}{p-l-1} + \ldots} x^{\rho_i}\left(C_i + \frac{C_{i1}}{x} + \ldots\right) \qquad (i=1,2)$$

oder von der Form

$$S_i = e^{\frac{ax^p}{p} + \frac{a_1 x^{p-1}}{p-1} + \ldots + \frac{a_{l-1} x^{p-l+1}}{p-l+1} + \frac{\beta_l x^{\frac{2p-2l+1}{2}}}{2p-2l+1} + \frac{\beta_{l1} x^{p-l}}{2p-2l} + \ldots}$$

$$\times x^{\frac{\rho}{2}}\left(C_i + \frac{C_{i1}}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{C_{i2}}{x} + \ldots\right). \qquad (i=1,2)$$

Im Falle $l = p$ führt die Substitution

$$y = e^{\frac{ax^p}{p} + \frac{a_1 x^{p-1}}{p-1} + \ldots + a_{p-1} x} z$$

auf eine Differentialgleichung, für welche $x = \infty$ eine Stelle der Bestimmtheit ist.

Aus der Art, wie die Differentialgleichung (A) auf eine Differentialgleichung zurückgeführt wurde, deren charakteristische Gleichung zwei verschiedene Wurzeln besitzt, folgt *in allen Fällen die asymptotische Darstellung der Integrale von* (A) *durch die Normalreihen oder anormalen Reihen* S_1 *und* S_2. Das Nähere ergiebt sich aus den in § 1 gefundenen Resultaten.

Charlottenburg, 8. October 1897.

SUR UNE QUESTION FONDAMENTALE DU CALCUL INTEGRAL

PAR

CH. RIQUIER

À CAEN.

Introduction.

Dans des recherches publiées en 1893 par les Annales de l'Ecole Normale, et reproduites deux ans plus tard par le Recueil des Savants étrangers (tome 32, n° 3), j'ai pu établir (en me bornant à l'examen des circonstances générales) l'existence des intégrales d'un système différentiel quelconque. Les réflexions que j'ai faites sur la question depuis cette époque m'ayant conduit à des résultats nouveaux, et aussi à une simplification considérable des raisonnements à l'aide desquels j'avais établi mes résultats antérieurs, il m'a semblé qu'une refonte totale de ces travaux, relatifs à un ordre de questions encore peu étudiées, présenterait quelque utilité: c'est ce qui m'a décidé à publier le présent Mémoire.

Je reprendrai tout d'abord, en le complétant, l'exposé de la partie historique.

CAUCHY, le premier, parvint, sur la question de l'existence des intégrales, à des résultats importants, dont il donna des démonstrations rigoureuses. Dans les tomes 14, 15 et 16 des Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (1842 et 1843), il prouve l'existence des intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires, en précisant ce que l'on doit entendre par *intégrales générales* d'un pareil système; puis il étudie au même point de vue un système linéaire de m équations

aux dérivées partielles du premier ordre, impliquant un nombre égal de fonctions inconnues

$$\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_m,$$

et tel qu'on puisse le résoudre par rapport aux m dérivées

$$\frac{\partial \varpi_1}{\partial t}, \frac{\partial \varpi_2}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial \varpi_m}{\partial t},$$

toutes relatives à une même variable t. La méthode à l'aide de laquelle il démontre la convergence des développements des intégrales n'est autre que celle des fonctions *majorantes*, adoptée, après lui, par presque tous les auteurs qui se sont occupés de ce genre de questions. Quant aux systèmes quelconques, on peut toujours, en introduisant de nouvelles fonctions inconnues, les réduire à des systèmes linéaires du premier ordre, et CAUCHY semble admettre que les seuls dont il y ait lieu de s'occuper sont ceux qui, après réduction, ont la forme ci-dessus définie.

En 1856, MM. BRIOT et BOUQUET, dans un Mémoire sur les systèmes d'équations différentielles ordinaires,[1] donnèrent une démonstration nouvelle de l'existence de leurs intégrales.

En 1872, le même point fut établi pour les systèmes, dits *complètement intégrables*, d'équations différentielles totales, et trois géomètres, MM. MÉRAY, BOUQUET et MAYER, en publièrent presque simultanément la solution.[2]

---

[1] BRIOT et BOUQUET, *Mémoire sur les fonctions définies par les équations différentielles* (Journal de l'Ecole Polytechnique, Cahier 36).

[2] MÉRAY, Revue des Sociétés Savantes (Sciences mathématiques, physiques et naturelles, t. 3, 1868).

MÉRAY, *Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale*, p. 143, 1872.

BOUQUET, Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques, t. 3, p. 265, 1872.

MAYER, Mathematische Annalen, t. 5, p. 448, 1872, et Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques, 1ère série, t. 11, 1876.

Une nouvelle démonstration du même point, pour laquelle j'ai prêté ma collaboration à M. MÉRAY, a été publiée en 1889 dans les Annales de l'Ecole Normale (MÉRAY et RIQUIER, *Sur la convergence des développements des intégrales d'un système d'équations différentielles totales*); elle se trouve reproduite dans un ouvrage récent de M. MÉRAY, (MÉRAY, *Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques*, 1ère partie, p. 256 et suiv.).

En 1875, les résultats, encore peu connus, de CAUCHY sur les systèmes partiels furent démontrés de nouveau par M. DARBOUX et Mme de KOWALEVSKY. Cette dernière y avait été conduite par la considération du système partiel qui porte son nom, système composé d'équations en nombre égal à celui des fonctions inconnues, et tel, qu'en désignant par

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_g$$

les fonctions dont il s'agit, et par

$$k_1, k_2, \ldots, k_g$$

les ordres respectifs du système par rapport à elles, ce dernier fût résoluble par rapport aux dérivées

$$\frac{\partial^{k_1}\varphi_1}{\partial x^{k_1}}, \frac{\partial^{k_2}\varphi_2}{\partial x^{k_2}}, \ldots, \frac{\partial^{k_g}\varphi_g}{\partial x^{k_g}},$$

toutes relatives à une même variable x. Les recherches de Mme de KOWALEVSKY font l'objet d'un Mémoire publié dans le Journal de Crelle;[1] M. DARBOUX, qui avait entrepris de son côté une recherche analogue, s'est borné à indiquer sa démonstration dans deux Notes communiquées à l'Académie des Sciences.[2]

En 1880, M. MÉRAY publia un Mémoire où il se proposait de démontrer d'une manière générale l'existence des intégrales des systèmes d'équations aux dérivées partielles.[3] Comme la lecture approfondie de ce Mémoire a été le point de départ de mes propres travaux, comme j'ai pu me convaincre d'ailleurs que son contenu est ignoré du public et des auteurs, je crois devoir entrer à ce sujet dans quelques détails.

M. MÉRAY considère d'abord un système *du premier ordre*, résolu par rapport à un certain nombre de dérivées, et il distingue essentiellement, *pour chaque fonction inconnue*, les variables indépendantes par rapport auxquelles sont prises les dérivées qui figurent dans les premiers membres du système, de celles qui sont étrangères à la formation des dérivées dont il s'agit; les premières sont, pour lui, les variables *principales* de la

---

[1] Tome 80, p. 1.

[2] Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t. 80, p. 101 et 317.

[3] *Démonstration générale de l'existence des intégrales des équations aux dérivées partielles* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 3ième série, t. 6, 1880).

fonction considérée, les dernières ses variables *paramétriques*, et il va de soi qu'une même variable peut être à la fois principale pour quelque fonction et paramétrique pour quelque autre.[1] M. MÉRAY partage ensuite les dérivées de tous ordres d'une même fonction inconnue en *paramétriques* et en *principales*, selon que les différentiations d'où elles proviennent intéressent ses *seules variables paramétriques*, ou bien, soit avec elles, soit sans elles, *quelque variable principale.*[2] Considérant enfin, dans un système de cette espèce, un groupe quelconque d'intégrales ordinaires, et les supposant développées par la formule de TAYLOR à partir de *valeurs initiales* choisies pour les variables, M. MÉRAY nomme *détermination initiale* de chaque intégrale la fonction de ses seules variables paramétriques à laquelle elle se réduit quand ses variables principales prennent leurs valeurs initiales;[3] puis il fait observer que les valeurs initiales de ces déterminations et de leurs dérivées de tous ordres sont respectivement égales à celles des intégrales mêmes et de leurs dérivées paramétriques.[4]

Pour disposer nettement les équations d'un pareil système, il convient, ajoute M. MÉRAY, de les écrire dans les cases d'un quadrillage rectangulaire, dont les lignes correspondent aux variables indépendantes et les colonnes aux fonctions inconnues, en plaçant l'équation qui aurait, par exemple, $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour premier membre, dans la case qui appartient à la fois à la colonne (u) et à la ligne (x): le tableau ainsi formé peut contenir des cases vides réparties d'une manière quelconque, et ces dernières sont, pour une colonne donnée, en nombre égal à celui des variables paramétriques de l'inconnue correspondante.[5] Si, pour fixer les idées, on désigne par u, v, w trois fonctions inconnues des quatre variables indépendantes x, y, z, s, et que l'on considère un système du premier ordre résolu par rapport aux dérivées

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial z},$$

[1] Journal de Mathématiques pures et appliquées, 3[ième] série, t. 6, 1880, p. 237.

[2] Ibid., p. 237.

[3] Ibid., p. 242.

[4] Ibid., p. 242.

[5] Ibid., p. 237 et 238.

la seule inspection du tableau

(1)

	(u)	(v)	(w)
(x)	$\frac{\partial u}{\partial x} = \dots$		
(y)	$\frac{\partial u}{\partial y} = \dots$	$\frac{\partial v}{\partial y} = \dots$	
(z)	$\frac{\partial u}{\partial z} = \dots$		$\frac{\partial w}{\partial z} = \dots$
(s)		$\frac{\partial v}{\partial s} = \dots$	

construit conformément aux indications précédentes, suffit à faire voir: 1° que la fonction u a pour variables principales x, y, z, pour variable paramétrique s, et pour dérivées paramétriques toutes celles qui intéressent la variable s à l'exclusion de x, y, z; 2° que la fonction v a pour variables principales y et s, pour variables paramétriques x et z, et pour dérivées paramétriques toutes celles qui intéressent x et z à l'exclusion de y et s; 3° enfin, que la fonction w a pour variable principale z, pour variables paramétriques x, y, s, et pour dérivées paramétriques toutes celles qui intéressent x, y, s à l'exclusion de z. Si l'on considère maintenant un groupe d'intégrales u, v, w de notre système, et que l'on désigne par x_0, y_0, z_0, s_0 les valeurs initiales choisies pour les variables indépendantes, les déterminations initiales de ces intégrales seront respectivement: la fonction de s à laquelle u se réduit pour $x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0$, la fonction de x et z à laquelle v se réduit pour $y - y_0 = s - s_0 = 0$, et la fonction de x, y, s à laquelle w se réduit pour $z - z_0 = 0$.

Cela étant, M. Méray assujettit les seconds membres des systèmes qu'il considère à une certaine restriction, dont l'énoncé importe peu,[1]

---

[1] Voici quelle est cette restriction: *En désignant par u et v deux fonctions inconnues quelconques, aucune dérivée de v ne figure dans les seconds membres des équations de la colonne* (u), *si quelque variable principale de v est paramétrique pour u* (Ibid., p. 238).

mais qui entraîne la conséquence capitale suivante:[1] *Si aux équations du système donné on adjoint toutes celles qui s'en déduisent par de simples différentiations, ces relations, dites primitives, peuvent être rangées dans un ordre de succession tel, que chacune ne contienne dans son second membre (outre les variables indépendantes, les fonctions inconnues et leurs dérivées paramétriques) que des dérivées principales figurant dans les premiers membres des relations antérieures.* M. Méray conclut de là que pour reconstruire en entier les développements par la série de Taylor d'intégrales que l'on sait d'avance exister, il suffit de connaître seulement leurs valeurs initiales et celles de leurs dérivées paramétriques de tous ordres, ou, ce qui revient au même, les déterminations initiales de ces intégrales;[2] car, ces déterminations étant supposées connues, les relations primitives permettent de calculer successivement les valeurs initiales de toutes les dérivées principales. Puis, il aborde le problème inverse, et il cherche si, réciproquement, le système donné admet des intégrales ordinaires ayant pour déterminations initiales respectives des fonctions, choisies au hasard, de leurs divers groupes de variables paramétriques.[3]

Or, pour que les intégrales dont il s'agit existent effectivement, il faut et il suffit, comme M. Méray le fait observer:[4] 1° que, dans le calcul des valeurs initiales des dérivées principales, il y ait concordance numérique entre les diverses expressions fournies pour chacune d'elles par les relations primitives; 2° que les développements des intégrales, construits *a priori* comme nous l'avons indiqué, soient convergents. — Se préoccupant d'abord de la première de ces conditions, M. Méray partage en deux classes bien distinctes les systèmes du premier ordre, dits *immédiats*, qui font l'objet principal de son Mémoire, et il les nomme *passifs* ou *non passifs,* suivant que la concordance numérique des relations primitives y a lieu pour des données initiales quelconques ou seulement pour un choix convenable de ces dernières. Après avoir formulé les conditions de passivité d'un système immédiat,[5] il s'occupe en dernier lieu de la

---

[1] Ibid., p. 239 et 240.
[2] Ibid., p. 242.
[3] Ibid., p. 243.
[4] Ibid., p. 245 et 250.
[5] Ibid., p. 245 et suiv.

convergence des développements des intégrales, et il est ainsi conduit à l'énoncé suivant:[1] *Tout système du premier ordre, immédiat et passif, est complètement intégrable, c'est à dire admet un groupe (unique) d'intégrales ordinaires ayant pour déterminations initiales des fonctions arbitrairement choisies de leurs variables paramétriques.* Par exemple, le système (1), s'il est immédiat et passif, admettra, d'après cet énoncé, un groupe (unique) d'intégrales ordinaires u, v, w, se réduisant respectivement:

u à une fonction donnée de s pour $x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0$;

v à une fonction donnée de x et z pour $y - y_0 = s - s_0 = 0$;

w à une fonction donnée de x, y et s pour $z - z_0 = 0$.

On voit ainsi qu'en supposant rigoureusement établie la convergence des développements des intégrales, la solution générale d'un système (du premier ordre) immédiat et passif dépend de fonctions (ou constantes) arbitraires en nombre précisément égal à celui des inconnues qui s'y trouvent engagées.

Finalement, et en ce qui concerne les systèmes différentiels quelconques, M. Méray admet que de simples résolutions d'équations, combinées avec des différentiations et des réductions au premier ordre, permettent de les ramener à la forme immédiate passive.[2]

Comme je l'ai dit plus haut, la lecture approfondie de ce Mémoire a été le point de départ de tous mes travaux sur les systèmes différentiels partiels, et il va sans dire que, dans cette étude, j'ai examiné de très-près la démonstration de la convergence. Cette dernière m'ayant paru inexacte, je fis part de mes doutes à M. Méray, qui les trouva justifiés; les efforts qu'il fit pour modifier la démonstration le conduisirent même à la découverte de certains cas de divergence qu'il ne soupçonnait pas d'abord,[3] et il publia en 1890, avec ma collaboration, un nouveau Mémoire[4] où la convergence des développements des intégrales se trouvait établie, cette fois, d'une façon rigoureuse, mais, bien entendu, pour une partie seulement des systèmes immédiats primitivement étudiés. Ce Mémoire est reproduit presque en entier dans un ouvrage récent de

[1] Ibid., p. 249 et suiv.

[2] Ibid., p. 236, 265, 266.

[3] Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 1888, t. 106, p. 648.

[4] *Sur la convergence des développements des intégrales ordinaires d'un système d'équations différentielles partielles* (Annales de l'Ecole Normale, 1890).

M. MÉRAY,[1] et il y est accompagné de quelques indications sommaires sur la marche générale à suivre pour traiter un système quelconque;[2] la conclusion du Mémoire de 1880 s'y trouve, naturellement, modifiée, et M. MÉRAY, au lieu de considérer les systèmes *immédiats* passifs comme le type fondamental auquel peut se ramener un système quelconque, assigne maintenant le même rôle aux systèmes *immédiats et réguliers* passifs, qui font l'objet du Mémoire de 1890: malheureusement, cette nouvelle conclusion n'est pas mieux établie que l'ancienne, et, à moins de recourir au changement des variables, qu'on doit, à mon avis, s'efforcer d'éviter, il me paraît peu probable qu'elle soit exacte. Quoi qu'il en soit, la connaissance des méthodes de M. MÉRAY et la collaboration que je lui ai prêtée m'ont été, pour mes recherches personnelles, extrêmement profitables; nonobstant une erreur dans la démonstration de la convergence, ses travaux ont, dès 1880, mis en pleine lumière le fait suivant, qui se trouvait désormais acquis:

Si un système du premier ordre, quelle que soit d'ailleurs sa nature, satisfait à la double condition

1° *de la passivité,*

2° *de la convergence des développements des intégrales,*

sa solution générale dépend de fonctions (ou constantes) arbitraires en nombre précisément égal à celui des inconnues qui s'y trouvent engagées.

Dans l'intervalle qui sépare la publication des deux Mémoires dont je viens de parler, M. KÖNIG[3] avait établi les conditions d'intégrabilité absolue d'un système du premier ordre de forme telle, qu'en désignant par

$$z_1, z_2, \ldots, z_m$$

les fonctions inconnues, et par

$$x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n$$

---

[1] *Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques,* 1ère partie, p. 310 et suiv.

[2] *Leçons nouvelles etc.*, p. 353 et suiv.

[3] J. KÖNIG, *Über die Integration simultaner Systeme partieller Differentialgleichungen mit mehreren unbekannten Functionen* (Mathematische Annalen, t. 23, 1884).

les variables indépendantes, le système fût résoluble par rapport aux mr dérivées de $z_1, z_2, \ldots, z_m$ relatives à $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Ce type, dans lequel rentrent évidemment les systèmes partiels étudiés par CAUCHY et les systèmes d'équations différentielles totales, n'est lui-même qu'un simple cas particulier des systèmes étudiés par M. MÉRAY et moi en 1890.

Dans une thèse de doctorat publiée en 1891,[1] M. BOURLET parvint à établir qu'un système differentiel quelconque est réductible à une forme du premier ordre, dans laquelle la convergence des développements des intégrales est assurée; mais, sauf des cas fortuits, la forme dont il s'agit n'était point passive, et, par suite, ne faisait nullement connaître le nombre et la nature des éléments arbitraires dont dépendent les intégrales générales.

Ainsi, la question de l'existence des intégrales dans un système quelconque était encore loin de se trouver résolue. Depuis l'époque de ma collaboration avec M. MÉRAY, j'y avais sans cesse réfléchi, et, poursuivant le courant d'idées où cette collaboration m'avait engagé, je m'efforçais de la résoudre en la ramenant au problème suivant: *Etant donné un système différentiel quelconque* (que je supposais ne comprendre qu'un nombre limité d'équations), *le réduire, sauf constatation éventuelle d'incompatibilité, à un système du premier ordre où se trouve réalisée la double condition*: 1° *de la passivité;* 2° *de la convergence des développements des intégrales.* Toutefois, pour diverses raisons qu'il serait trop long d'indiquer ici, j'avais été induit à penser qu'en se bornant dès le début de la théorie, comme on avait coutume de le faire, à la considération exclusive des systèmes du premier ordre, on n'y introduisait qu'une simplification apparente, et même, à certains égards, une nouvelle complication. J'avais donc résolu de ne m'attacher en premier lieu qu'à la découverte d'une forme canonique complètement intégrable, sans m'inquiéter aucunement de l'ordre des équations; cette forme une fois obtenue, j'espérais pouvoir la ramener à une semblable d'ordre inférieur, et par suite au premier ordre. C'est ce qui arriva en effet. En 1892, je réussis à opérer la réduction d'un système quelconque à une forme complètement intégrable, et l'année suivante (1893) je substituai à celle-ci une forme de même nature, mais du pre-

---

[1] BOURLET, *Sur les équations aux dérivées partielles simultanées qui contiennent plusieurs fonctions inconnues* (thèse, avril 1891; Annales de l'Ecole Normale, 1891).

mier ordre, où se trouvaient engagées, avec les inconnues du système proposé, quelques-unes de leurs dérivées à titre d'inconnues adjointes.[1] Il va sans dire que *l'économie des conditions initiales, évidente dans ce dernier système* en vertu des explications données plus haut, *se trouvait par là même immédiatement connue dans le proposé*, et que, *dans l'un comme dans l'autre, la solution générale dépendait de fonctions (ou constantes) arbitraires en nombre fini.*[2]

Trois ans après, en 1896, M. Delassus,[3] à l'aide d'une méthode toute différente, essentiellement basée sur le changement des variables, donna une deuxième solution du problème dont je m'étais occupé: il réduisit tout système différentiel à une forme complètement intégrable,

---

[1] Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 28 mars 1892, 27 février 1893, 24 avril 1893. — Annales de l'Ecole Normale, 1893. — Recueil des savants étrangers, t. 32, n° 3.

[2] J'insiste sur ce point, qui semble n'avoir pas été très-bien compris de quelques lecteurs: par le seul fait de la réduction à une forme passive *du premier ordre* où la convergence des développements des intégrales était assurée, la solution générale d'un système donné devait, comme je viens de l'expliquer, dépendre finalement de fonctions arbitraires en nombre fini, et ces fonctions se dégager d'elles-mêmes, sans que j'eusse besoin de m'en inquiéter autrement; mais il n'en eût pas été de même, si la forme à laquelle j'aboutissais en dernier lieu eût été d'ordre supérieur au premier. Ainsi, au début d'un Mémoire publié en 1894, M. Tresse a formulé l'énoncé suivant: *Etant donné un système quelconque d'équations aux dérivées partielles, on peut, après un nombre limité de différentiations et d'éliminations, ou bien montrer qu'il est incompatible, ou bien le mettre sous forme d'un système en involution* (système passif) *dont la solution générale dépend alors, suivant les cas, de fonctions ou de constantes arbitraires* (Acta mathematica, 1894, p. 9). Or, en supposant établie la convergence des développements des intégrales (partie de la question que M. Tresse ne se proposait pas d'examiner), il ressort uniquement de sa démonstration que, pour déterminer un groupe d'intégrales ordinaires de ce système en involution, *dont l'ordre est quelconque*, on peut se donner arbitrairement certaines portions de leurs développements respectifs, c'est-à-dire certaines constantes, en nombre le plus souvent infini, et qui, dans le cas général, ne se grouperont pas *d'elles-mêmes* en un nombre fini de fonctions. J'ajoute que M. Tresse me semble avoir laissé dans l'ombre certains points importants, et n'avoir pas montré, par exemple, comment on peut, *à l'aide d'un nombre limité d'opérations*, s'assurer si les conditions d'intégrabilité d'un système donné se trouvent ou non satisfaites.

[3] *Extension du théorème de Cauchy aux systèmes les plus généraux d'équations aux dérivées partielles* (Annales de l'Ecole normale, 1896).

et, dans un énoncé trop long pour être rapporté ici, [1] il indiqua en détail les fonctions et constantes arbitraires dont se trouvait dépendre, après cette réduction, la solution générale.

De tous les auteurs dont je viens d'énumérer les travaux, deux seulement, M. DELASSUS et moi, ont traité d'une manière générale la question de l'existence des intégrales, et encore convient il d'observer que la méthode de M. DELASSUS, la dernière en date, tombe en défaut dans le cas où le changement des variables est à éviter; si l'on a affaire, notamment, à un système complètement intégrable, [2] dont on soit tenu, pour telle ou telle raison, de ne pas modifier la structure, il sera presque toujours impossible de le considérer comme appartenant au type canonique, de forme très-particulière, définie par ce géomètre, et d'appliquer les conclusions de l'énoncé auquel j'ai fait allusion plus haut. Bien que ma méthode me semblàt, en grande partie, échapper à ces inconvénients, je me suis efforcé, comme je l'ai dit, de l'améliorer au double point de vue du fond et de la forme. Par exemple, au lieu d'avoir recours, comme je l'avais fait jusqu'ici, à la réduction au premier ordre, pour fixer l'économie des conditions initiales qui déterminent entièrement une solution ordinaire de ma forme canonique, je substitue à ce procédé une méthode directe, dont l'emploi permet d'abréger, dans une mesure considérable, et les raisonnements de la théorie, et les calculs de la pratique. Je modifie également, pour aboutir à des conclusions plus larges, ma démonstration de la convergence des développements des intégrales. Enfin, la considération des *cotes*, qui peut, au premier abord, sembler bizarre et artificielle, mais à laquelle je suis redevable de tous mes résultats antérieurs, me fournit aujourd'hui le moyen, non seulement d'étendre ces résultats d'une manière notable, grâce à une généralisation de ma forme canonique, [3] mais encore d'en formuler quelques autres sur des systèmes non canoniques, et en particulier de généraliser un théorème de M. GOURSAT. [4]

---

[1] Annales de l'Ecole Normale, 1896, p. 461 et 462.

[2] C'est à dire remplissant la double condition: 1° de la passivité; 2° de la convergence des développements des intégrales.

[3] Voir les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 27 décembre 1897.

[4] Voir les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 6 décembre 1897 et 17 janvier 1898.

L'exposition détaillée de ces théories constitue l'objet du présent Mémoire.

La première partie est consacrée à la méthode nouvelle qui me sert à fixer, dans un système différentiel passif, l'économie des conditions initiales, c'est à dire des fonctions ou constantes, en nombre fini, dont la donnée détermine entièrement un groupe d'intégrales hypothétiques du système.[1]

Dans la deuxième partie, je définis une forme de système différentiel que je nomme *orthoïque*, j'établis les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elle soit passive, et je montre, par divers exemples,[2] que les développements des intégrales hypothétiques n'y sont pas nécessairement convergents.

Dans la troisième partie, j'étudie un cas remarquable et très-étendu où cette convergence ne peut manquer d'avoir lieu: c'est celui des systèmes que je qualifie d'*orthonomes.*[3]

Dans la quatrième, je prouve qu'un système différentiel quelconque peut se ramener à la forme orthonome passive.

Dans la cinquième, j'établis diverses propositions relatives à des systèmes non orthonomes.

Enfin, dans l'Appendice qui fait suite au Mémoire, je montre, d'abord, que toutes les formes complètement intégrables étudiées jusqu'à ce jour sont de simples cas particuliers de la forme orthonome passive, et ensuite, que les résultats exposés par M. GOURSAT dans les Comptes Rendus du 2 novembre 1897 se trouvent contenus dans ceux que j'expose à la fin de la cinquième partie.

---

[1] Voir les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 31 mai 1898.

[2] Voir les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 13 décembre 1897.

[3] Je tiens à faire observer dès maintenant que le mot *orthonome*, tel qu'il se trouve défini dans le présent Mémoire, possède une signification plus large que dans mes travaux antérieurs. Consulter à ce sujet l'Appendice qui fait suite au Mémoire.

PREMIÈRE PARTIE.

Problème préliminaire.

1. En désignant par $x, y, z, \ldots$ des variables indépendantes en nombre quelconque, par $x_0, y_0, z_0, \ldots$ des valeurs particulières attribuées à ces variables, et par $R_x, R_y, R_z, \ldots$ des constantes positives, nous dirons qu'une fonction de $x, y, z, \ldots$ est *développable dans le domaine* $(R_x, R_y, R_z, \ldots)$ *des valeurs particulières* $x_0, y_0, z_0, \ldots$, si, pour toutes valeurs de $x, y, z, \ldots$ satisfaisant aux relations mod $(x - x_0) < R_x$, mod $(y - y_0) < R_y$, mod $(z - z_0) < R_z, \ldots$, elle est représentable par la somme d'une certaine série entière en $x - x_0, y - y_0, z - z_0, \ldots$. Les quantités $R_x, R_y, R_z, \ldots$ se nomment les *rayons* du domaine.

D'après cela, l'expression la plus générale d'une fonction de $x, y, z, \ldots$ développable dans quelque domaine des valeurs initiales $x_0, y_0, z_0, \ldots$, s'obtiendra par la considération d'une série entière en $x - x_0, y - y_0, z - z_0, \ldots$ dont tous les coefficients sont arbitraires, et soumis, dans leur ensemble, à la seule restriction de la convergence. Un pareil développement, à coefficients *tous* indéterminés, constitue ce que nous appellerons une *fonction schématique* de $x, y, z, \ldots$; si le nombre des variables indépendantes se réduit à zéro, la fonction schématique dégénère en une *constante schématique*.

On dit qu'un monome

$$A(x - x_0)^\alpha (y - y_0)^\beta (z - z_0)^\gamma \ldots,$$

entier par rapport aux différences $x - x_0, y - y_0, z - z_0, \ldots$, est *divisible* par un monome de même espèce

$$A'(x - x_0)^{\alpha'} (y - y_0)^{\beta'} (z - z_0)^{\gamma'} \ldots,$$

si aucune des différences

$$\alpha - \alpha', \beta - \beta', \gamma - \gamma', \ldots$$

n'est négative. Il est clair que si un premier monome est divisible par un second, et celui-ci divisible par un troisième, le premier l'est forcément par le troisième: car les relations évidentes

$$\alpha - \alpha'' = (\alpha - \alpha') + (\alpha' - \alpha''),$$
$$\beta - \beta'' = (\beta - \beta') + (\beta' - \beta''),$$
$$\gamma - \gamma'' = (\gamma - \gamma') + (\gamma' - \gamma''),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ne peuvent contenir dans leurs premiers membres quelque différence négative, que si elles en contiennent quelqu'une dans leurs seconds membres.

Cela posé, considérons un ensemble *limité* E, formé avec des monomes, de coefficient 1, entiers par rapport aux différences $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, ...; si, dans le développement de notre fonction schématique, on supprime tous les termes qui admettent pour diviseur quelqu'un des monomes de cet ensemble, nous dirons que la portion restante du développement est le *résidu* de la *coupure* E, pratiquée dans le développement total. On peut d'ailleurs, sans changer le résidu, négliger dans l'ensemble E les termes que nous nommerons *superflus*, c'est à dire ceux qui admettent pour diviseur quelque autre terme du même ensemble.

2. *Le résidu d'une coupure E, pratiquée dans le développement d'une fonction schématique de $x, y, z, \ldots$, peut être mis sous la forme*

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{n=g} (x - x_0)^{a_n} (y - y_0)^{b_n} (z - z_0)^{c_n} \ldots F_{\theta_n},$$

où $a_n, b_n, c_n, \ldots$ désignent des entiers positifs ou nuls, θ_n un groupe de variables indépendantes extrait du groupe total $x, y, z, \ldots$, et F_{θ_n} une fonction schématique des seules variables θ_n; les termes élémentaires provenant du développement de l'expression (2) *quand on y remplace les fonctions schématiques*

$$(3) \qquad F_{\theta_1}, F_{\theta_2}, \ldots, F_{\theta_g}$$

par leurs développements respectifs, sont tous dissemblables en $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, ...

I. *Notre proposition est exacte, si dans l'ensemble E ne figure effectivement qu'une seule des différences $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, ...*

Car, après la suppression des termes superflus, l'ensemble E se compose d'un monome unique tel que $(x-x_0)^\alpha$, et le résidu de la coupure est alors évidemment

$$(4)\qquad F_0(y,z,\ldots)+(x-x_0)F_1(y,z,\ldots)+(x-x_0)^2F_2(y,z,\ldots)+\cdots \\ +(x-x_0)^{\alpha-1}F_{\alpha-1}(y,z,\ldots),$$

où $F_0, F_1, F_2, \ldots, F_{\alpha-1}$ désignent α fonctions schématiques des seules variables $y, z, \ldots$; on a ainsi une expression satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

II. *Si notre proposition est exacte dans le cas où l'ensemble E contient effectivement moins de $k+1$ différences, elle l'est encore dans le cas où il en contient $k+1$.*

Le point à établir est évident si, après la suppression des termes superflus, le nombre des différences figurant effectivement dans l'ensemble donné tombe au dessous de $k+1$.

Si ce nombre reste égal à $k+1$, supposons, pour fixer les idées, que $x-x_0$ soit une des $k+1$ différences dont il s'agit, désignons par α l'exposant maximum dont elle se trouve affectée dans l'ensemble, et partageons ce dernier en plusieurs autres

$$E^0, E^1, \ldots, E^{\alpha-1}, E^\alpha,$$

suivant que, dans les divers termes de E, la différence $x-x_0$ figure avec l'un ou l'autre des exposants

$$0, 1, \ldots, \alpha-1, \alpha.$$

En supposant, comme nous le faisons, que l'ensemble E ait été débarrassé de ses termes superflus, les monomes

$$x-x_0,\ (x-x_0)^2, \ldots, (x-x_0)^{\alpha-1}$$

sont absents des ensembles respectifs

$$(5)\qquad E^1, E^2, \ldots, E^{\alpha-1},$$

sans quoi les termes de E^α admettraient pour diviseur quelque terme des

ensembles (5); quant à l'ensemble E^a, il peut, suivant les cas, contenir ou non le monome $(x-x_0)^a$. Cela étant, nous désignerons par

$$e^1, e^2, \ldots, e^{a-1}$$

les ensembles respectivement déduits de (5) en remplaçant par zéro, dans chacun de leurs termes, l'exposant de $x-x_0$, sans changer les exposants des autres différences; et, dans l'hypothèse où E^a ne contiendrait pas le monome $(x-x_0)^a$, nous nommerons e^a l'ensemble déduit de E^a par la même opération. En posant, pour raison de symétrie, $e^0 = E^0$, il est clair que dans la totalité des ensembles

$$e^0, e^1, \ldots, e^{a-1}, e^a$$

figurent au plus k différences.

Enfin, décomposons par la pensée le résidu de la coupure E en divers tronçons, comprenant respectivement: le premier, les termes indépendants de $x-x_0$; le second, les termes du premier degré en $x-x_0$; etc.; l'avant-dernier, les termes de degré $a-1$ en $x-x_0$; et le dernier, tous les termes restants, c'est-à-dire ceux qui sont d'un degré *au moins égal à* a par rapport à cette différence. Le résidu de la coupure peut alors s'écrire

$$(6)\qquad T_0(y,z,\ldots) + (x-x_0)T_1(y,z,\ldots) + \cdots$$
$$+ (x-x_0)^{a-1}T_{a-1}(y,z,\ldots) + (x-x_0)^a T(x,y,z,\ldots),$$

et il s'agit de déterminer les formes respectives des expressions

$$(7)\qquad T_0(y,z,\ldots),\ T_1(y,z,\ldots),\ \ldots,\ T_{a-1}(y,z,\ldots),\ T(x,y,z,\ldots).$$

Considérons à cet effet les deux monomes

$$(8)\qquad (x-x_0)^a(y-y_0)^b(z-z_0)^c\ldots,$$

$$(9)\qquad (y-y_0)^b(z-z_0)^c\ldots,$$

dont le second se déduit du premier en y remplaçant l'exposant a par zéro. Pour que le monome (8) n'admette comme diviseur aucun des termes de l'ensemble E, il faut et il suffit:

si $a = 0$, que le monome (9) ne soit divisible par aucun terme de e^0;

si $a = 1$, que le monome (9) ne soit divisible par aucun terme de $[e^0, e^1]$;

si $a = 2$, que le monome (9) ne soit divisible par aucun terme de $[e^0, e^1, e^2]$;

etc.;

si $a = \alpha - 1$, que le monome (9) ne soit divisible par aucun terme de $[e^0, e^1, e^2, \ldots, e^{\alpha-1}]$.

Il suffira donc, pour connaître successivement

$$T_0(y, z, \ldots), \quad T_1(y, z, \ldots), \quad \ldots, \quad T_{\alpha-1}(y, z, \ldots),$$

de pratiquer, dans le développement d'une fonction schématique des seules variables $y, z, \ldots$, les coupures respectives

$$[e^0], [e^0, e^1], \ldots, [e^0, e^1, \ldots, e^{\alpha-1}].$$

Reste à calculer $T(x, y, z, \ldots)$. Si l'ensemble E^α contient le monome $(x - x_0)^\alpha$, $T(x, y, z, \ldots)$ est identiquement nul. Dans le cas contraire, on observera qu'en supposant $a \geqq \alpha$, la condition nécessaire et suffisante pour que le monome (8) ne soit divisible par aucun terme de E, est que le monome

$$(x - x_0)^{a-\alpha}(y - y_0)^b(z - z_0)^c \ldots$$

ne soit divisible par aucun terme de

$$(10) \qquad [e^0, e^1, \ldots, e^{\alpha-1}, e^\alpha];$$

en conséquence, il suffira, pour connaître $T(x, y, z, \ldots)$, de pratiquer la coupure (10) dans le développement d'une fonction schématique de *toutes* les variables $x, y, z, \ldots$.

Ainsi, le calcul des expressions (7) peut s'effectuer par des coupures opérées à l'aide d'ensembles où les différences $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0, \ldots$ figurent en nombre au plus égal à k. Un simple coup d'oeil jeté sur la formule (6) nous montre alors que notre théorème, supposé exact dans ce dernier cas, ne cesse pas de l'être quand ces différences figurent en nombre $k + 1$ dans l'ensemble donné.

III. Le simple rapprochement des alinéas I et II suffit à établir l'exactitude de notre énoncé général.

3. Supposons que le résidu d'une coupure E, pratiquée dans le développement d'une fonction schématique de $x, y, z, \ldots$, ait été mis sous la forme (2), définie au numéro précédent; et désignons par ω_n le groupe de variables complémentaire du groupe θ_n, c'est à dire tel, que l'ensemble des deux groupes θ_n, ω_n reproduise une fois et une seule chacune des variables indépendantes $x, y, z, \ldots$. Si, considérant le développement (sans coupure) de notre fonction schématique, on en prend la dérivée d'ordres partiels $a_n, b_n, c_n, \ldots$, et qu'on attribue ensuite aux variables ω_n leurs valeurs initiales, on tombe sur un développement, Φ_{θ_n}, ne dépendant évidemment, comme F_{θ_n}, que des variables θ_n.

Cela étant, *les deux développements* $F_{\theta_n}, \Phi_{\theta_n}$ *convergent dans les mêmes limites, et la connaissance de l'un équivaut à celle de l'autre.*

I. *Si, sur un développement entier en* $x - x_0, y - y_0, z - z_0, \ldots$, *contenant comme facteur commun dans tous ses termes le monome*

$$(x - x_0)^{a_n}(y - y_0)^{b_n}(z - z_0)^{c_n} \ldots, \tag{11}$$

on effectue la dérivation d'ordres partiels $a_n, b_n, c_n, \ldots$, *il suffit, pour remonter du développement ainsi obtenu au premier, d'effectuer sur lui* a_n *quadratures relatives à* x, b_n *relatives à* y, c_n *relatives à* z, *etc., en ayant soin que le résultat de chaque quadrature s'annule pour la valeur initiale de la variable qu'elle intéresse.*

Cette remarque, que l'on vérifie sans peine pour un terme quelconque du développement donné, s'applique par là même au développement tout entier.

II. Si un terme du développement schématique de notre fonction ne contient pas en facteur le monome (11), la dérivation d'ordres partiels $a_n, b_n, c_n \ldots$, exécutée sur le terme dont il s'agit, donnera pour résultat zéro. Si un terme du même développement contient en facteur le monome (11), et si, abstraction faite de ce facteur, il dépend de quelqu'une des variables du groupe ω_n, la dérivation d'ordres partiels $a_n, b_n, c_n, \ldots$, puis l'attribution dans le résultat aux variables ω_n de leurs valeurs initiales, donneront encore un résultat nul. Il suffit donc, pour effectuer l'opération indiquée par l'énoncé, de considérer, dans le développement

schématique de notre fonction, l'ensemble des termes qui contiennent en facteur le monome (11), et qui, abstraction faite de ce facteur, dépendent des seules variables θ_n.

Or, les termes dont il s'agit sont précisément ceux que contient l'expression

$$(x-x_0)^{a_n}(y-y_0)^{b_n}(z-z_0)^{c_n}\dots F_{\theta_n};$$

car, s'il en existait d'autres dans la portion (2) du développement, cette dernière contiendrait, contrairement à ce qui a lieu, plusieurs termes schématiques semblables; et, s'il en existait d'autres dans la portion restante, les deux portions contiendraient des termes schématiques respectivement semblables, ce qui est absurde. Il suffit donc, pour passer de F_{θ_n} à Φ_{θ_n}, de multiplier F_{θ_n} par le monome (11), et d'exécuter sur le résultat la dérivation d'ordres partiels $a_n, b_n, c_n, \dots$. Inversement, pour passer de Φ_{θ_n} à F_{θ_n}, on exécutera, sur Φ_{θ_n}, a_n quadratures relatives à x, b_n relatives à y, c_n relatives à z, etc., en ayant soin que le résultat de chaque quadrature s'annule pour la valeur initiale de la variable qu'elle intéresse (I), puis on supprimera, dans le développement ainsi obtenu, le facteur commun (11).

Dans le cas où le monome (11) ne contient *effectivement* aucune des variables θ_n, il est clair que les deux fonctions F_{θ_n}, Φ_{θ_n} ne diffèrent que par un facteur numérique, et que l'on a

$$\Phi_{\theta_n} = 1 \,.\, 2 \dots a_n \times 1 \,.\, 2 \dots b_n \times 1 \,.\, 2 \dots c_n \times \dots \times F_{\theta_n}.$$

4. Supposons que, dans une question quelconque, on ait à considérer une fonction inconnue u des variables $x, y, z, \dots$, et le développement de cette fonction à partir des valeurs particulières $x_0, y_0, z_0, \dots$; supposons en outre que, parmi les données de la question, doive figurer le résidu d'une certaine coupure, pratiquée dans le développement dont il s'agit. Pour formuler une pareille donnée, on commencera par mettre ce résidu sous la forme (2), en y laissant provisoirement tous les coefficients indéterminés; cela fait:

Ou bien on se donnera les g fonctions (3) qui figurent dans l'expression (2);

Ou bien, faisant successivement $n = 1, 2, \dots, g$, on se donnera la

fonction des variables θ_n à laquelle se réduit $\frac{\partial^{a_n+b_n+c_n+\cdots} u}{\partial x^{a_n} \partial y^{b_n} \partial z^{c_n} \cdots}$ par l'attribution aux variables ω_n de leurs valeurs initiales.

Moyennant le recours éventuel à des quadratures, cette seconde donnée est, comme nous l'avons vu (3), entièrement équivalente à la première.

Par exemple, si l'ensemble E se réduit au terme unique $(x - x_0)^\alpha$, la donnée, dans une question quelconque, du résidu de la coupure E, pratiquée dans le développement de u, pourra se formuler: soit par celle des α fonctions

$$F_0(y, z, \ldots), \quad F_1(y, z, \ldots), \quad \ldots, \quad F_{\alpha-1}(y, z, \ldots),$$

qui figurent dans l'expression (4); soit par celle des α fonctions de $y, z, \ldots$ auxquelles se réduisent respectivement

$$u, \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{\alpha-1} u}{\partial x^{\alpha-1}}$$

pour $x = x_0$.

5. Eclaircissons ce qui précède par d'autres exemples.

I. Considérons une fonction schématique u des variables $x, y, z, \ldots$, et supposons que l'ensemble E, à l'aide duquel on veut pratiquer une coupure dans le développement de cette fonction, se compose du terme unique $(x - x_0)^\alpha (y - y_0)^\beta$, où α et β sont l'un et l'autre supérieurs à zéro. En adoptant les mêmes notations qu'à l'alinea II du n° 2, on voit que les ensembles $E^0, E^1, \ldots, E^{\alpha-1}$ n'existent pas, et que l'ensemble E^α se réduit à $(x - x_0)^\alpha (y - y_0)^\beta$; que, par suite, les ensembles $e^0, e^1, \ldots, e^{\alpha-1}$ n'existent pas, et que l'ensemble e^α se réduit à $(y - y_0)^\beta$. Les expressions

$$T_0(y, z, \ldots), \quad T_1(y, z, \ldots), \quad \ldots, \quad T_{\alpha-1}(y, z, \ldots)$$

se réduisent donc à de simples fonctions schématiques des seules variables $y, z, \ldots$. Quant à l'expression $T(x, y, z, \ldots)$, elle s'obtiendra en pratiquant la coupure $(y - y_0)^\beta$ dans le développement d'une fonction schématique de toutes les variables $x, y, z, \ldots$. Il vient ainsi (2, I) pour l'expression (6):

$$(15)\quad F_0(y,z,\ldots)+(x-x_0)F_1(y,z,\ldots)+\ldots+(x-x_0)^{\alpha-1}F_{\alpha-1}(y,z,\ldots)$$
$$+(x-x_0)^\alpha[H_0(x,z,\ldots)+(y-y_0)H_1(x,z,\ldots)+\ldots$$
$$+(y-y_0)^{\beta-1}H_{\beta-1}(x,z,\ldots)],$$

où $F_0, F_1, \ldots, F_{\alpha-1}$ désignent des fonctions schématiques de $y, z, \ldots$, et $H_0, H_1, \ldots, H_{\beta-1}$ des fonctions schématiques de $x, z, \ldots$.

En conséquence, la donnée, dans une question quelconque, de la portion du développement de u qui résulte de la coupure E, pourra se formuler:

soit par celle des $\alpha+\beta$ fonctions

$$F_0(y,z,\ldots),\ F_1(y,z,\ldots),\ \ldots,\ F_{\alpha-1}(y,z,\ldots),$$
$$H_0(x,z,\ldots),\ H_1(x,z,\ldots),\ \ldots,\ H_{\beta-1}(x,z,\ldots)$$

qui figurent dans l'expression (15);

soit par celle: 1° des α fonctions de $y, z, \ldots$ auxquelles se réduisent respectivement

$$u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \ldots,\ \frac{\partial^{\alpha-1}u}{\partial x^{\alpha-1}}$$

pour $x=x_0$; 2° des β fonctions de $x, z, \ldots$ auxquelles se réduisent respectivement

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha},\ \frac{\partial^{\alpha+1}u}{\partial x^\alpha\partial y},\ \ldots,\ \frac{\partial^{\alpha+\beta-1}u}{\partial x^\alpha\partial y^{\beta-1}}$$

pour $y=y_0$.

Il est clair qu'en permutant, dans l'opération précédente, les rôles respectifs des variables x et y, on arrivera, pour la portion considérée du développement de u, à la forme

$$(16)\quad P_0(x,z,\ldots)+(y-y_0)P_1(x,z,\ldots)+\ldots+(y-y_0)^{\beta-1}P_{\beta-1}(x,z,\ldots)$$
$$+(y-y_0)^\beta[Q_0(y,z,\ldots)+(x-x_0)Q_1(y,z,\ldots)+\ldots$$
$$+(x-x_0)^{\alpha-1}Q_{\alpha-1}(y,z,\ldots)].$$

Dans une question quelconque, la donnée de cette portion de développement pourra donc encore se formuler:

soit par celle des $\alpha+\beta$ fonctions

$$P_0(x, z, \ldots),\ P_1(x, z, \ldots),\ \ldots,\ P_{\beta-1}(x, z, \ldots),$$
$$Q_0(y, z, \ldots),\ Q_1(y, z, \ldots),\ \ldots,\ Q_{\alpha-1}(y, z, \ldots)$$

qui figurent dans l'expression (16);

soit par celle: 1° des β fonctions de $x, z, \ldots$ auxquelles se réduisent respectivement

$$u,\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \ldots,\ \frac{\partial^{\beta-1} u}{\partial y^{\beta-1}}$$

pour $y = y_0$; 2° des α fonctions de $y, z, \ldots$ auxquelles se réduisent respectivement

$$\frac{\partial^{\beta} u}{\partial y^{\beta}},\ \frac{\partial^{\beta+1} u}{\partial y^{\beta}\partial x},\ \ldots,\ \frac{\partial^{\beta+\alpha-1} u}{\partial y^{\beta}\partial x^{\alpha-1}}$$

pour $x = x_0$.

II. Considérons une fonction schématique des trois variables x, y, z, et un ensemble E composé du terme unique $(x-x_0)(y-y_0)(z-z_0)$. En adoptant les mêmes notations qu'à l'alinea II du n° 2, on voit que $\alpha = 1$, que l'ensemble E^0 n'existe pas, et que l'ensemble E^α ou E^1 se réduit à $(x-x_0)(y-y_0)(z-z_0)$; que, par suite, l'ensemble e^α ou e^1 se réduit à $(y-y_0)(z-z_0)$. Dans la formule

$$(17) \qquad T_0(y, z) + (x-x_0)\,T(x, y, z),$$

l'expression $T_0(y, z)$ se réduit donc à une fonction schématique des seules variables y, z, et l'expression $T(x, y, z)$ s'obtiendra en pratiquant la coupure $(y-y_0)(z-z_0)$ dans le développement d'une fonction schématique des trois variables x, y, z. On a ainsi, conformément à l'exemple I,

$$T(x, y, z) = H(x, z) + (y-y_0)\,P(x, y),$$

et la formule (17) devient alors

$$(18) \qquad F(y, z) + (x-x_0)\,H(x, z) + (x-x_0)(y-y_0)\,P(x, y),$$

où $F(y, z)$, $H(x, z)$, $P(x, y)$ désignent trois fonctions schématiques.

En conséquence, la donnée, dans une question quelconque, de la portion du développement de u obtenue comme résidu de la coupure E, pourra se formuler:

soit par celle des trois fonctions $F(y,z)$, $H(x,z)$, $P(x,y)$, qui figurent dans l'expression (18);

soit par celle: 1° de la fonction de y et z à laquelle se réduit u pour $x = x_0$; 2° de la fonction de x et z à laquelle se réduit $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour $y = y_0$; 3° de la fonction de x et y à laquelle se réduit $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ pour $z = z_0$.

En permutant d'une façon quelconque, dans l'opération précédente, les rôles respectifs des trois variables x, y, z, on arrivera, pour la portion considérée du développement schématique, à une forme se déduisant de (18) par la permutation dont il s'agit. Comme il existe six permutations de trois objets, on obtiendra en tout six formes, de chacune desquelles on déduira, comme ci-dessus, deux manières de formuler la donnée de cette portion de développement.

III. Si l'ensemble E se compose uniquement de monomes du premier degré, par exemple de $x - x_0$ et $y - y_0$, il est clair que le résidu de la coupure E est une fonction schématique de toutes les variables autres que x et y, et que la donnée, dans une question quelconque, de cette portion du développement de u se formulera par celle de la fonction à laquelle doit se réduire u pour $x - x_0 = y - y_0 = 0$.

IV. Considérons une fonction schématique des trois variables x, y, z, et supposons que l'ensemble E se compose des deux termes

$$(x - x_0)(y - y_0)\ ,\ (x - x_0)(z - z_0).$$

En adoptant les mêmes notations qu'à l'alinea II du n° 2, on voit que l'ensemble E^0 n'existe pas, et que l'ensemble E^a ou E^1 se compose des deux termes ci-dessus; que, par suite, l'ensemble e^a ou e^1 se compose des deux termes

$$(19) \qquad y - y_0\ ,\ z - z_0.$$

Dans la formule (17), l'expression $T_0(y,z)$ se réduit donc à une fonction schématique des seules variables y et z, et l'expression $T(x,y,z)$ s'obtient en pratiquant la coupure (19) dans le développement d'une fonction schématique de x, y, z; conformément à l'exemple précédent, $T(x,y,z)$ est alors une fonction schématique de la variable x, et l'expression (17) prend la forme

$$(20) \qquad F(y,z)+(x-x_0)H(x)$$

où $F(y,z)$, $H(x)$ désignent deux fonctions schématiques.

En conséquence, la donnée, dans une question quelconque, de la portion du développement de u qui résulte de la coupure E, pourra se formuler:

soit par celle des deux fonctions $F(y,z)$, $H(x)$ qui figurent dans l'expression (20);

soit par celle: 1° de la fonction de y et z à laquelle se réduit u pour $x-x_0=0$; 2° de la fonction de x à laquelle se réduit $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour $y-y_0=z-z_0=0$.

V. Considérons une fonction schématique des trois variables x, y, z, et supposons que l'ensemble E se compose des trois termes

$$x-x_0\,,\ (y-y_0)(z-z_0)\,,\ (y-y_0)^3.$$

L'entier α est ici égal à 1, l'ensemble E^0 se compose des deux termes

$$(21) \qquad (y-y_0)(z-z_0)\,,\ (y-y_0)^3,$$

et l'ensemble E^1 du terme unique $x-x_0$; l'expression $T(x,y,z)$, qui figure dans la formule (17), est donc identiquement nulle, et l'expression $T_0(y,z)$ s'obtient en pratiquant la coupure (21) dans le développement d'une fonction schématique des seules variables y et z. En ordonnant l'ensemble (21) par rapport aux puissances croissantes de $y-y_0$, et appliquant la méthode exposée au n° 2, on voit immédiatement: 1° que l'expression $T_0(y,z)$ est de la forme

$$S_0(z)+(y-y_0)S_1(z)+(y-y_0)^2S_2(z)+(y-y_0)^3S(y,z);$$

2° que $S(y,z)$ est identiquement nul; 3° que $S_0(z)$ est une fonction schématique de z; 4° que $S_1(z)$ et $S_2(z)$ s'obtiennent en pratiquant la coupure $z-z_0$ dans le développement d'une fonction schématique de z, et se réduisent par conséquent à des constantes schématiques.

En définitive, on obtient, pour la portion du développement schématique résultant de la coupure E, l'expression

$$(22) \qquad F(z)+A(y-y_0)+B(y-y_0)^2,$$

où A, B désignent deux constantes schématiques, et $F(z)$ une fonction schématique.

Cela étant, la donnée, dans une question quelconque, de la portion du développement de u provenant de la coupure dont il s'agit, pourra se formuler:

soit par celle des deux constantes A, B et de la fonction $F(z)$, qui figurent dans l'expression (22);

soit par celle: 1° de la fonction de z à laquelle se réduit u pour $x-x_0=y-y_0=0$; 2° des valeurs numériques que prennent respectivement $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ pour $x-x_0=y-y_0=z-z_0=0$.

VI. Considérons une fonction schématique des trois variables x, y, z, et supposons que l'ensemble E se compose des quatre termes

$$(x-x_0)^2(z-z_0)^2\,,\ (x-x_0)^2(y-y_0)\,,\ (y-y_0)(z-z_0)\,,\ (y-y_0)^2.$$

En ordonnant l'ensemble E par rapport aux puissances croissantes de $y-y_0$, on obtient les trois ensembles

$$(x-x_0)^2(z-z_0)^2\ ;\ [(x-x_0)^2(y-y_0)\,,(y-y_0)(z-z_0)]\ ;\ (y-y_0)^2.$$

La portion du développement schématique provenant de la coupure E est donc de la forme

$$T_0(x,z)+(y-y_0)T_1(x,z)+(y-y_0)^2T(x,y,z),$$

et l'on voit, par l'application de notre méthode: 1° que $T(x,y,z)$ est identiquement nul; 2° que $T_0(x,z)$ s'obtient en pratiquant la coupure $(x-x_0)^2(z-z_0)^2$ dans le développement d'une fonction schématique des seules variables x et z; 3° que $T_1(x,z)$ s'obtient en pratiquant la coupure

$$(x-x_0)^2(z-z_0)^2,\ (x-x_0)^2,\ z-z_0,$$

ou, ce qui revient au même, la coupure

$$(x-x_0)^2,\ z-z_0$$

dans le développement d'une fonction schématique des seules variables x et z.

En calculant, d'après cela, les expressions $T_0(x,z)$, $T_1(x,z)$, on trouvera: 1° qu'elles ont respectivement les formes

$$T_0(x,z) = S_0(z) + (x-x_0)S_1(z) + (x-x_0)^2 S(x,z),$$
$$T_1(x,z) = U_0(x) + (z-z_0)U(x,z);$$

2° que $U(x,z)$ est identiquement nul, que $S(x,z)$ s'obtient en pratiquant la coupure $(z-z_0)^2$ dans le développement d'une fonction schématique de x et z, que $S_0(z)$ et $S_1(z)$ sont des fonctions schématiques de z, et que $U_0(x)$ s'obtient en pratiquant la coupure $(x-x_0)^2$ dans le développement d'une fonction schématique de x. Il vient ainsi:

$$(23)\quad T_0(x,z) = F_0(z) + (x-x_0)F_1(z) + (x-x_0)^2[H_0(x) + (z-z_0)H_1(x)],$$
$$T_1(x,z) = A + B(x-x_0),$$

où A, B désignent des constantes schématiques, et $F_0(z)$, $F_1(z)$, $H_0(x)$, $H_1(x)$ des fonctions schématiques; on en déduit, pour la portion de développement cherchée,

$$(24)\quad F_0(z) + (x-x_0)F_1(z) + (x-x_0)^2H_0(x) + (x-x_0)^2(z-z_0)H_1(x) + A(y-y_0) + B(x-x_0)(y-y_0).$$

En conséquence, la donnée, dans une question quelconque, de la portion du développement de u provenant de la coupure E, pourra se formuler:

soit par celle des deux constantes A, B et des quatre fonctions $F_0(z)$, $F_1(z)$, $H_0(x)$, $H_1(x)$, qui figurent dans l'expression (24);

soit par celle: 1° des deux fonctions de z auxquelles se réduisent respectivement u et $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour $x-x_0=y-y_0=0$; 2° des deux fonctions de x auxquelles se réduisent respectivement $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z}$ pour $y-y_0=z-z_0=0$; 3° des deux valeurs numériques que prennent respectivement $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ pour $x-x_0=y-y_0=z-z_0=0$.

Le calcul de l'expression $T_0(x,z)$ s'effectue, comme nous venons de le voir, en pratiquant la coupure $(x-x_0)^2(z-z_0)^2$ dans le développement d'une fonction schématique de x et z, et l'on tombe ainsi sur l'ex-

pression (23). Or, il est clair qu'en permutant, dans cette opération, les rôles respectifs des variables x et z, on obtiendra

$$T_0(x, z) = P_0(x) + (z - z_0)P_1(x) + (z - z_0)^2[Q_0(z) + (x - x_0)Q_1(z)].$$

La portion de développement schématique provenant de la coupure E peut donc aussi se mettre sous la forme

$$(25) \quad P_0(x) + (z - z_0)P_1(x) + (z - z_0)^2 Q_0(z) + (z - z_0)^2(x - x_0)Q_1(z) + A(y - y_0) + B(x - x_0)(y - y_0),$$

où A, B désignent deux constantes schématiques et $P_0(x)$, $P_1(x)$, $Q_0(z)$, $Q_1(z)$ quatre fonctions schématiques; et, en conséquence, la donnée, dans une question quelconque, de la portion du développement de u provenant de la coupure dont il s'agit, pourra encore se formuler:

soit par celle des deux constantes A, B et des quatre fonctions $P_0(x)$, $P_1(x)$, $Q_0(z)$, $Q_1(z)$, qui figurent dans l'expression (25);

soit par celle: 1° des deux fonctions de x auxquelles se réduisent respectivement u et $\frac{\partial u}{\partial z}$ pour $y - y_0 = z - z_0 = 0$; 2° des deux fonctions de z auxquelles se réduisent respectivement $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ et $\frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial x}$ pour $x - x_0 = y - y_0 = 0$; 3° des deux valeurs numériques que prennent respectivement $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ pour $x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0$.

5'. Soient $u, v, \ldots$ diverses fonctions schématiques (en nombre limité) des variables $x, y, z, \ldots$. Considérant un ensemble *limité* formé avec des dérivées de $u, v, \ldots$, convenons de dire qu'une dérivée quelconque de l'une des fonctions $u, v, \ldots$ est *principale* relativement à cet ensemble, si elle coïncide avec quelqu'un des termes de l'ensemble ou quelqu'une de leurs dérivées; convenons de dire, dans le cas contraire, qu'elle est *paramétrique* par rapport à l'ensemble.

Cela posé, si, dans les développements respectifs de $u, v, \ldots$, on considère exclusivement les termes qui, aux facteurs numériques connus près, ont pour coefficients les valeurs initiales de ces fonctions et de leurs dérivées paramétriques de tous ordres, il est facile de voir que ces portions de développements peuvent s'obtenir à l'aide de coupures. Par exemple,

si les dérivées de u figurant dans l'ensemble donné ont pour ordres partiels respectifs, relativement à $x, y, z, \ldots,$

$$\begin{array}{l} \alpha', \beta', \gamma', \ldots, \\ \alpha'', \beta'', \gamma'', \ldots, \\ \alpha''', \beta''', \gamma''', \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

il suffira, pour obtenir la portion considérée du développement de u, de pratiquer dans son développement total la coupure

$$\left\{\begin{array}{l} (x-x_0)^{\alpha'}(y-y_0)^{\beta'}(z-z_0)^{\gamma'}\ldots, \\ (x-x_0)^{\alpha''}(y-y_0)^{\beta''}(z-z_0)^{\gamma''}\ldots, \\ (x-x_0)^{\alpha'''}(y-y_0)^{\beta'''}(z-z_0)^{\gamma'''}\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

On résout ainsi, de la manière la plus simple, un problème qui se présente sans cesse dans l'étude des systèmes différentiels.

DEUXIÈME PARTIE.

Systèmes orthoïques; conditions de passivité; divergence éventuelle des développements des intégrales hypothétiques.

6. Soient

$$x, y, \ldots,$$

$$u, v, \ldots,$$

des notations (en nombre limité) désignant, les premières diverses variables indépendantes, les autres diverses fonctions de ces variables. A chacune des quantités

$$x, y, \ldots, u, v, \ldots$$

faisons correspondre p entiers, positifs, nuls ou négatifs, que nous nommerons respectivement *cote première*, *cote seconde*, ..., *cote* $p^{\text{ième}}$ de cette quantité, les entiers dont il s'agit étant assujettis à la seule restriction, que *la cote première de toute variable indépendante* soit *positive et au moins égale à* 1. Considérons ensuite une dérivée quelconque de l'une des fonctions $u, v, \ldots$, et nommons *cote* $q^{\text{ième}}$ $(q = 1, 2, \ldots, p)$ de la dérivée en question l'entier obtenu en ajoutant à la cote $q^{\text{ième}}$ de la fonction les cotes $q^{\text{ièmes}}$ de toutes les variables de différentiation, distinctes ou non. Désignons enfin par δ, δ' deux quantités appartenant à l'ensemble que forment les fonctions $u, v, \ldots$ et leurs dérivées de tous ordres, par

$$c_1, c_2, \ldots, c_p,$$

$$c'_1, c'_2, \ldots, c'_p$$

les cotes respectives de ces deux quantités, et convenons de dire que δ' est *normale* ou *anormale* par rapport à δ, suivant que les différences

$$(26) \qquad c_1 - c'_1, c_2 - c'_2, \ldots, c_p - c'_p$$

satisfont ou non à la double condition: 1° que ces différences ne soient

pas toutes nulles; 2° que la première d'entre elles non égale à zéro soit positive.

Cela étant:

1° *Suivant que la quantité* δ' *est normale ou anormale vis à vis de la quantité* δ, *la dérivée* $\frac{\partial^{a+b+\cdots}\delta'}{\partial x^a \partial y^b \ldots}$ *possède l'une ou l'autre propriété vis à vis de la dérivée* $\frac{\partial^{a+b+\cdots}\delta}{\partial x^a \partial y^b \ldots}$.

Car, en désignant par

$$g_1, g_2, \ldots, g_p,$$
$$h_1, h_2, \ldots, h_p,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

les cotes respectives de $x, y, \ldots$, les différences (26) sont respectivement égales aux différences

$$(c_1 + ag_1 + bh_1 + \ldots) - (c_1' + ag_1 + bh_1 + \ldots),$$
$$(c_2 + ag_2 + bh_2 + \ldots) - (c_2' + ag_2 + bh_2 + \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(c_p + ag_p + bh_p + \ldots) - (c_p' + ag_p + bh_p + \ldots).$$

2° *Si la quantité* δ'' *est normale vis à vis de la quantité* δ', *et celle-ci normale vis à vis de la quantité* δ, *la première,* δ'', *jouit de la même propriété vis à vis de la dernière,* δ.

Si l'on désigne en effet par $c_1'', c_2'', \ldots, c_p''$ les cotes de δ'', et si l'on considère les différences

$$c_1 - c_1', \ c_2 - c_2', \ \ldots, \ c_p - c_p',$$
$$c_1' - c_1'', \ c_2' - c_2'', \ \ldots, \ c_p' - c_p'',$$
$$c_1 - c_1'', \ c_2 - c_2'', \ \ldots, \ c_p - c_p'',$$

rangées, comme nous venons de les écrire, en un tableau rectangulaire, il résulte de nos hypothèses que, dans chacune des deux premières lignes horizontales du tableau, les différences ne sont pas toutes nulles, et que la première non égale à zéro y est positive; comme d'ailleurs le dernier

terme de chaque colonne verticale est égal à la somme des deux termes placés au dessus de lui, la dernière ligne horizontale jouit évidemment de la même propriété que les deux premières.

7. *Les quantités $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ étant affectées chacune de p cotes, conformément aux indications du n° 6, tout ensemble illimité formé avec des dérivées de $u, v, \ldots$ se partage, suivant une loi déterminée, en ensembles limités successifs satisfaisant à la condition suivante:*

Si l'on considère deux dérivées appartenant à l'ensemble illimité donné, l'une d'elles est normale ou anormale relativement à l'autre, suivant que l'ensemble partiel où elle figure précède ou non celui de cette autre.

Observons tout d'abord qu'en désignant par φ la cote première minima des diverses fonctions $u, v, \ldots$, toute dérivée d'ordre n de ces dernières aura une cote première au moins égale à $n + \varphi$, puisque la cote première de toute variable indépendante est au moins égale à 1. Il résulte de là: 1° que la cote première d'une dérivée d'ordre quelconque ne tombe jamais au dessous de $1 + \varphi$; 2° qu'en désignant par c un entier déterminé quelconque, au moins égal à $1 + \varphi$, le nombre des dérivées possédant une cote première égale à c est essentiellement limité.

Cela posé, on partagera d'abord les dérivées de l'ensemble illimité en ensembles successifs d'après leurs cotes premières croissantes; chaque ensemble ainsi obtenu sera, toutes les fois qu'il y aura lieu, partagé en ensembles partiels successifs d'après les cotes secondes croissantes des dérivées qui le composent; puis, chacun des ensembles résultants en ensembles partiels successifs d'après les cotes troisièmes croissantes de ses termes; et ainsi jusqu'à épuisement des p cotes. L'ensemble illimité se trouvera finalement partagé en ensembles limités se succédant suivant une certaine loi, et l'on voit immédiatement que, par rapport à une dérivée quelconque figurant dans l'ensemble partiel de rang N, les dérivées figurant dans les ensembles partiels de rangs $1, 2, \ldots, N-1$ sont toutes normales, tandis que les dérivées figurant dans les ensembles partiels de rangs $N, N+1, \ldots$ sont toutes anormales.

8. Supposons actuellement que l'on se donne un ensemble *limité* formé avec des dérivées de $u, v, \ldots$; puis, considérant, parmi les dérivées de $u, v, \ldots$, celles qui sont principales relativement à cet ensemble (5'), partageons-les,

conformément aux indications du n° 7, en ensembles limités successifs, et convenons de dire qu'une dérivée principale est de *classe* 1, 2, 3, ..., suivant qu'elle appartient au premier, au second, au troisième, ... des ensembles successifs dont il s'agit.

Cela posé, et en vertu du théorème précédent (7), *toute dérivée principale est normale ou anormale relativement à une autre, suivant qu'elle est ou non de classe inférieure à cette autre.*

On observera que *toute dérivée de quelque dérivée principale est de classe supérieure à cette dernière:* car, la cote première de toute variable indépendante étant au moins égale à 1, toute différentiation exécutée sur quelqu'une des fonctions $u, v, \ldots$ ou de leurs dérivées a pour effet d'augmenter la cote première.

9. Considérons maintenant un système différentiel où se trouvent engagées les fonctions inconnues $u, v, \ldots$ des variables indépendantes x, $y, \ldots$, et, conformément aux indications du n° 6, attribuons p cotes à chacune de ces diverses quantités. Le système différentiel proposé sera dit *orthoïque*, si, moyennant un choix convenable du nombre p et des cotes attribuées à $x, y, \ldots, u, v, \ldots$, il remplit à la fois les deux conditions suivantes:

1° Le système en question se trouve résolu par rapport à certaines dérivées, qui ne figurent, non plus que leurs propres dérivées, dans aucun des seconds membres, et ces derniers, si l'on y considère pour un instant $x, y, \ldots, u, v, \ldots$, et les diverses dérivées de $u, v, \ldots$ qui y figurent, comme autant de variables indépendantes distinctes, sont tous développables dans un même domaine.

2° Chaque second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues ou dérivées) qui soient normales par rapport au premier membre correspondant.

10. Etant donné un système orthoïque, nous dirons que les fonctions

$$U(x, y, \ldots),\ V(x, y, \ldots), \ldots$$

constituent pour lui un groupe d'*intégrales ordinaires,* si elles remplissent à la fois les deux conditions suivantes: 1° les fonctions $U(x, y, \ldots)$, $V(x, y, \ldots), \ldots$ sont développables dans quelque domaine, et les valeurs

qu'elles y acquièrent, prises conjointement avec celles de leurs dérivées et des variables indépendantes, restent toujours intérieures à un domaine où les divers seconds membres soient à la fois développables; 2° la substitution de $U(x, y, \ldots)$, $V(x, y, \ldots)$, ... à $u, v, \ldots$, opérée entre les mêmes limites, transforme en identités les diverses équations du système.

La substitution d'intégrales ordinaires connues dans les équations du système en transforme tous les seconds membres en des fonctions composées des variables, des intégrales et de certaines de leurs dérivées. D'après la définition même des intégrales ordinaires, et entre les limites assignées par cette définition, les règles établies pour les fonctions composées sont applicables aux seconds membres dont il s'agit; d'ailleurs, les deux membres de chaque équation étant identiquement égaux après cette substitution, leurs dérivées semblables le sont aussi, et l'on peut, en conséquence, différentier indéfiniment les relations du système. Les relations ainsi obtenues peuvent ensuite être combinées de mille manières entre elles et avec les proposées, puis les résultats de ces combinaisons être différentiés à leur tour, et fournir les éléments de nouvelles combinaisons, qui seront elles-mêmes différentiées; et ainsi de suite indéfiniment. On peut, en un mot, déduire du système donné une foule de relations dont chacune est identiquement satisfaite par la substitution à u, v, ... d'un groupe quelconque d'intégrales ordinaires.

Parmi les relations auxquelles peuvent conduire des calculs de cette nature, nous distinguerons spécialement celles qui, ayant pour premier membre une dérivée de quelque fonction inconnue, ne contiennent dans leur second membre aucune quantité anormale relativement au premier; et nous dirons, pour abréger, qu'une semblable relation est *normale*, comme aussi l'expression fournie par elle pour la dérivée qui figure dans son premier membre.

Cette définition des relations et des expressions *normales* est d'ailleurs applicable dans tout système différentiel où chacune des variables et des inconnues a été affectée de cotes, conformément aux indications du n° 6.

11. *Si sur une relation normale on exécute des différentiations quelconques, en remplaçant, avant ou après quelques-unes de ces différentiations, telles ou telles des dérivées qui figurent dans le second membre par des expressions normales des dérivées en question, on tombe encore sur une relation normale.*

I. *Si sur une relation normale on exécute des différentiations quelconques, on tombe sur une relation de même nature.*

Soit en effet

$$(27) \qquad \partial = f(x, y, \ldots, \partial', \ldots)$$

une relation normale, dans laquelle $\partial', \ldots$ désignent, conformément à nos définitions, des quantités toutes normales par rapport à ∂. La relation déduite de (27) par une différentiation relative à x a pour premier membre $\frac{\partial \partial}{\partial x}$, et son second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que les quantités $\partial', \ldots$ et leurs dérivées premières par rapport à x. Or, les quantités $\partial', \ldots$ étant normales vis à vis de ∂, les quantités $\frac{\partial \partial'}{\partial x}, \ldots$ jouissent de la même propriété vis à vis de $\frac{\partial \partial}{\partial x}$ (6); d'un autre côté, si l'on désigne par $c_1, c_1', \ldots, g_1$ les cotes premières respectives de $\partial, \partial', \ldots, x$, cette même hypothèse entraîne les relations

$$c_1 - c_1' \geqq 0, \ldots,$$

d'où l'on déduit, à cause de $g_1 > 0$,

$$(c_1 + g_1) - c_1' > 0, \ldots,$$

et dès lors les quantités $\partial', \ldots$ sont toutes normales vis à vis de $\frac{\partial \partial}{\partial x}$.

Ainsi, la condition formulée dans la définition d'une relation normale ne cesse pas d'être satisfaite après une première différentiation exécutée sur la relation donnée. En vertu du même raisonnement, appliqué à la relation résultante, elle ne cesse pas de l'être après une deuxième, et ainsi de suite, quel que soit le nombre des différentiations.

II. *Si dans le second membre d'une relation normale on remplace telles ou telles dérivées par certaines de leurs expressions normales, on tombe encore sur une relation normale.*

Désignons par ∂ le premier membre de la relation donnée, et par ∂' l'une des dérivées figurant au second membre; puis, considérant une expression normale de ∂', nommons ∂'' l'une des inconnues ou dérivées

valeurs particulières x_0, y_0, ... peuvent être reconstruits, dès que l'on connaît seulement leurs valeurs initiales et celles de leurs dérivées paramétriques de tous ordres. [On suppose, bien entendu, que les valeurs $x_0, y_0, \ldots$ n'excèdent pas les limites indiquées par la définition même des intégrales ordinaires (10)].

Effectivement, si l'on donne aux variables $x, y, \ldots$ leurs valeurs initiales x_0, y_0, ..., les intégrales dont il s'agit et leurs dérivées de tous ordres prennent, elles aussi, leurs valeurs initiales, et, comme celles des intégrales et de leurs dérivées paramétriques sont supposées connues, chaque relation primitive ne contient plus dans son second membre d'autres quantités inconnues que les valeurs initiales des dérivées principales de classes inférieures à son premier membre. Cela étant, et les relations primitives étant partagées en groupes successifs d'après les classes croissantes de leurs premiers membres, les relations du premier groupe fourniront tout d'abord les valeurs initiales des dérivées principales de première classe; ces dernières une fois connues, les relations primitives du deuxième groupe feront connaître les valeurs initiales des dérivées principales de deuxième classe; et ainsi de suite indéfiniment.

On connaîtra donc ainsi les valeurs initiales des intégrales, et de leurs dérivées, paramétriques et principales, de tous ordres; or, ces valeurs initiales ne sont autres, aux facteurs numériques connus près, que les coefficients des développements cherchés.

En vertu d'une définition donnée au n° 12, le théorème ci-dessus peut encore s'exprimer comme il suit:

Quand un système orthoïque possède quelque groupe d'intégrales ordinaires, leurs développements par la formule de Taylor peuvent être reconstruits, dès que l'on connaît seulement leurs déterminations initiales.

Nous savons d'ailleurs (12), (4) que la connaissance de ces déterminations initiales revient à celle de certaines fonctions ou constantes, en nombre essentiellement fini.

14. *Inversement, cherchons si, dans un système orthoï[illegible] il existe quelque groupe d'intégrales ordinaires répondant à des cond[illegible] initiales données.* (On suppose, bien entendu, que les valeurs initial[illegible] riables, prises conjointement avec celles des intégrales hypothét[illegible] des dé-

rivées paramétriques figurant dans les seconds membres du système donné, sont intérieures à un domaine où ces derniers soient développables.)

I. *Pour que de pareilles intégrales existent, il est tout d'abord nécessaire que les relations primitives s'accordent à fournir, pour chacune de leurs dérivées principales, une seule et même valeur initiale.*

Cette concordance a lieu d'elle-même pour les dérivées principales de première classe. Une pareille dérivée ne peut être en effet la dérivée d'aucun premier membre du système, car elle serait alors de classe supérieure à ce premier membre (8), par suite de classe supérieure à la classe minima, qui est 1: il en résulte que les expressions primitives des dérivées dont il s'agit sont toutes fournies par des équations du système donné, et, comme celui-ci a ses premiers membres tous distincts, chaque dérivée principale de première classe ne possède qu'une seule expression primitive. Mais, si l'on considère les dérivées principales des classes suivantes, elles *peuvent*, et c'est ce qui a lieu fréquemment, en posséder plusieurs distinctes.

Cela étant, supposons qu'il existe un groupe d'intégrales ordinaires répondant aux conditions initiales données, partageons les relations primitives en groupes successifs d'après les classes croissantes de leurs premiers membres, et pour effectuer, conformément aux indications du numéro 13, le calcul des valeurs initiales des dérivées principales, remplaçons dans les seconds membres les variables, les intégrales et les dérivées paramétriques par leurs valeurs initiales connues. Cela fait, et les valeurs initiales des dérivées principales de première classe ayant été calculées sans incompatibilité à l'aide des relations primitives du premier groupe, il faudra qu'en portant les valeurs trouvées dans les seconds membres des relations primitives du deuxième groupe, celles d'entre ces dernières qui ont pour premier membre une même dérivée principale de deuxième c[illegible]e, s'accordent à fournir pour elle une même valeur initiale: car, s'il [illegible] avait seulement deux dont les seconds membres fussent numéri[illegible] différents, leur sous[illegible]ction membre à membre conduirait à une [illegible]é. Ces concordan[illegible]t supposées [illegible], il faudra ensuit[illegible]ant toutes les [illegible] déjà calculées dans les seconds mem[illegible]ns primitiv[illegible]sième groupe, celles d'entre ces dern[illegible] premie[illegible] une même dérivée principale de

troisième classe, s'accordent à fournir pour elle une même valeur initiale. Et ainsi de suite indéfiniment.

II. *La concordance numérique des relations primitives étant supposée avoir lieu, la convergence des développements des intégrales hypothétiques correspondant aux données initiales choisies est encore une condition nécessaire à l'existence effective de ces intégrales.*

Il suffit, pour s'en convaincre, de se reporter à la définition même des intégrales ordinaires (10).

III. *Si, pour un choix déterminé des conditions initiales, les relations primitives s'accordent numériquement, et qu'en outre les développements des intégrales hypothétiques soient convergents, leurs sommes constituent des intégrales ordinaires du système orthoïque donné.*

Soient en effet:

$x, y, \ldots$ les variables indépendantes;

$x_0, y_0, \ldots$ leurs valeurs initiales;

$u, v, \ldots$ les fonctions inconnues;

$U, V, \ldots$ les sommes des développements, supposés convergents, des intégrales hypothétiques.

Considérons un domaine $\mathfrak{D}$ des valeurs initiales $x_0, y_0, \ldots$, dont les rayons soient suffisamment petits pour que les fonctions de $x, y, \ldots$ en lesquelles se transforment, par la substitution de $U, V, \ldots$ à $u, v, \ldots$, les deux membres des diverses équations données, soient toutes développables dans le domaine dont il s'agit. En vertu même du calcul qui a fourni les coefficients des développements $U, V, \ldots$, les valeurs initiales des variables indépendantes, prises conjointement avec celles des développements eux mêmes et de leurs dérivées de tous ordres, vérifient les relations primitives. Donc, les fonctions de $x, y, \ldots$ qui, après la substitution, figurent dans les deux membres d'une équation différentielle quelconque, sont égales, ainsi que leurs dérivées semblables de tous ordres, pour $x - x_0 = y - y_0 = \ldots = 0$, et par suite sont identiquement égales entre elles dans toute l'étendue du domaine $\mathfrak{D}$.

IV. *Il ne peut y avoir enfin plus d'un groupe d'intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales données.*

Car chaque relation primitive, étant du premier degré par rapport à la dérivée principale qui figure dans son premier membre, ne fournit pour cette dernière qu'une seule valeur initiale.

15. Nous dirons qu'un système orthoïque est *complètement intégrable*, s'il admet un groupe (nécessairement unique) d'intégrales ordinaires répondant à des données initiales arbitrairement choisies; *passif*, si la concordance numérique des relations primitives (14, I) a lieu pour toutes les données initiales possibles.

En vertu de ces définitions et des remarques faites au numéro précédent, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système orthoïque soit complètement intégrable, sont: 1° que le système en question soit passif; 2° que les développements, construits *a priori*, d'intégrales hypothétiques répondant à des données initiales quelconques, soient toujours convergents.

Nous nous occuperons tout d'abord de la passivité.

16. Un mécanisme très-simple, appliqué aux relations primitives d'un système orthoïque, permet, comme nous allons le voir, d'en déduire, pour les dérivées principales des classes successives, certaines expressions dépendant exclusivement des variables, des fonctions inconnues et de leurs dérivées paramétriques.

Les relations primitives étant partagées en groupes successifs d'après les classes croissantes $1, 2, 3, \ldots$ de leurs premiers membres, désignons par $\mathfrak{P}_1$ ou par $\mathfrak{H}_1$ indifféremment le premier de ces groupes, par $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \ldots$ les groupes suivants, et souvenons-nous que le groupe $\mathfrak{P}_1$ (ou $\mathfrak{H}_1$) a ses premiers membres nécessairement tous distincts, tandis que le contraire *peut* avoir lieu pour chacun des suivants $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \ldots$ (14, I). Remplaçons maintenant dans les relations $\mathfrak{P}_2$ chacune des dérivées principales de première classe par son expression (unique) tirée de $\mathfrak{H}_1$: comme une semblable expression dépend exclusivement des variables, des fonctions inconnues et de leurs dérivées paramétriques, le groupe des relations résultantes, $\mathfrak{H}_2$, fournira, pour les dérivées principales de seconde classe, des expressions

jouissant de la même propriété. Considérons ensuite les relations $\mathfrak{P}_3$, et éliminons-en de toutes les manières possibles, à l'aide de $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, les dérivées principales des deux premières classes; autrement dit, extrayons du groupe $[\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2]$ un groupe partiel fournissant une expression et une seule pour chacune des dérivées principales des deux premières classes, éliminons ces dernières entre $\mathfrak{P}_3$ et les relations ainsi obtenues, et répétons l'opération en remplaçant successivement le groupe partiel considéré par tous les groupes analogues semblablement extraits de $[\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2]$. Il est clair que le groupe des relations résultantes, $\mathfrak{U}_3$, fournira, pour les dérivées principales de troisième classe, des expressions ne dépendant, comme les seconds membres de $\mathfrak{U}_1$ et $\mathfrak{U}_2$, que des variables, des fonctions inconnues et de leurs dérivées paramétriques. L'élimination des dérivées principales des trois premières classes, effectuée dans $\mathfrak{P}_4$ de toutes les manières possibles à l'aide de $[\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3]$, conduira de même à un groupe $\mathfrak{U}_4$ fournissant, pour les dérivées principales de quatrième classe, des expressions exclusivement composées avec les quantités dont il s'agit. Et ainsi de suite indéfiniment.

Nous nommerons *ultimes* les relations

$$\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3, \ldots$$

obtenues à l'aide du mécanisme que nous venons de décrire, et aussi les expressions qu'elles fournissent pour les dérivées principales des classes $1, 2, 3, \ldots$.

D'après ce qui précède, et en considérant comme autant de variables indépendantes distinctes $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ et les dérivées de tous ordres de $u, v, \ldots$, *les relations primitives entraînent* comme conséquences nécessaires *les relations ultimes. Réciproquement* d'ailleurs, il est facile de voir que *ces dernières entraînent les premières.*

Enfin, notre proposition du n° 11, d'où nous avons déjà déduit la nature normale des relations primitives, entraîne aussi de proche en proche celle des relations ultimes appartenant aux groupes successifs $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3, \ldots$.

17. Si l'on considère deux dérivées (distinctes) d'une fonction quelconque $F(x, y, \ldots)$, et que l'on adjoigne mentalement à chacune d'elles la suite indéfinie de ses propres dérivées, tout terme commun aux deux ensembles illimités ainsi obtenus se nommera une *résultante* des deux dé-

rivées en question. Pour passer de la fonction F à l'une ou à l'autre de ces dernières, il faut exécuter sur elle certaines différentiations, dont quelques-unes peuvent être les mêmes de part et d'autre: en désignant par le symbole $D.$ l'ensemble de ces différentiations communes, et par les symboles $D'., D''.$ l'ensemble des différentiations restantes pour la première et la seconde dérivée respectivement, les deux dérivées considérées peuvent évidemment s'écrire

$$D.D'.F, D.D''.F,$$

et l'on voit sans peine: 1° qu'elles admettent $D.D'.D''.F$ comme *résultante unique d'ordre minimum;* 2° que l'ensemble complet de leurs résultantes s'obtient en adjoignant à celle d'ordre minimum la suite indéfinie de ses propres dérivées.

Considérons maintenant un système différentiel résolu par rapport à certaines dérivées des inconnues, et, dans ce système, deux équations ayant pour premiers membres respectifs deux dérivées d'une même inconnue; puis, prenons la résultante d'ordre minimum de ces dérivées, et répétons l'opération en faisant varier de toutes les manières possibles le choix de la fonction inconnue, et celui des deux équations sur les premiers membres desquelles on doit opérer: les résultantes, en nombre essentiellement limité, que nous obtiendrons ainsi, se nommeront, par rapport au système donné, les dérivées *cardinales* de ses diverses fonctions inconnues.

18. Cela posé, *pour qu'un système orthoïque soit passif, il faut et il suffit que les diverses expressions ultimes d'une même dérivée cardinale quelconque soient égales identiquement, c'est à dire quelles que soient les valeurs attribuées aux variables, aux fonctions inconnues et à celles d'entre leurs dérivées paramétriques qui y figurent, ces trois sortes de quantités étant considérées pour un instant comme autant de variables indépendantes distinctes.* [1]

I. Comme nous l'avons dit plus haut (16), les relations primitives entraînent les relations ultimes, et réciproquement ces dernières entraînent les premières. Pour qu'un système orthoïque soit passif, il est donc nécessaire et suffisant que la concordance numérique des relations ultimes

---

[1] J'ai établi cette proposition en 1893 pour des systèmes différentiels de forme un peu moins générale. Voir les Annales de l'Ecole Normale, 1893, p. 76 à 86.

ait lieu pour toutes les données initiales possibles, ou, en d'autres termes, que les diverses expressions ultimes de chaque dérivée principale soient identiquement égales.

Toute dérivée cardinale étant principale, *les conditions posées sont donc évidemment nécessaires*, et il nous reste à prouver qu'elles sont suffisantes, c'est à dire que leur réalisation entraîne l'égalité identique des diverses expressions ultimes de chaque dérivée principale.

II. Des relations ultimes on peut, par un procédé analogue à celui qui nous les a fournies, en déduire de nouvelles.

Différentions un nombre quelconque de fois une relation ultime; puis, après la dernière différentiation, remplaçons les diverses dérivées principales contenues dans le second membre par telles ou telles de leurs expressions ultimes. Dans le premier membre de la relation résultante figure évidemment une dérivée principale, qui se trouve alors exprimée *directement* (c'est à dire sans l'intermédiaire d'aucune autre dérivée principale) à l'aide des variables indépendantes, des fonctions inconnues et de quelques-unes de leurs dérivées paramétriques. Pour abréger, et bien qu'une foule d'autres relations déduites du système jouissent aussi de cette propriété, nous qualifierons spécialement de *directes* les relations auxquelles conduit l'application du mécanisme précédent (en y comprenant les relations ultimes elles-mêmes), et nous affecterons de la même qualification les expressions qui en résultent pour les diverses dérivées principales des fonctions inconnues.

Cela posé, *si l'on forme, à l'aide du mécanisme décrit ci-dessus, une relation directe quelconque,* il résulte immédiatement du n° 11 et de la nature normale des relations ultimes, que *les relations successivement rencontrées dans le cours d'un semblable calcul sont toutes normales.*

III. *Dans un système orthoïque, chaque dérivée principale de première classe n'a qu'une expression directe.*

Effectivement, nous avons déjà observé (14, I) qu'une dérivée principale de première classe ne peut être la dérivée d'aucun premier membre du système: il en résulte que les expressions directes des dérivées principales de première classe sont toutes fournies par des équations du système donné, et, comme les premiers membres y sont tous distincts, chacune des dérivées dont il s'agit n'a qu'une seule expression directe.

IV. Les relations directes, d'après la définition même que nous en avons donnée, appartiennent toutes à l'un ou à l'autre des trois groupes suivants:

les relations du système donné;

les relations obtenues en différentiant un nombre quelconque de fois une relation du système donné, et remplaçant, dans le second membre de la relation résultante, les diverses dérivées principales par telles ou telles de leurs expressions ultimes;

les relations obtenues en effectuant sur une relation du système donné l'opération précédente, puis sur la relation résultante une opération de même espèce.

Dans tous les cas, on part, pour former une relation directe quelconque, d'une certaine équation du système donné.

Cela posé, *si, dans un système orthoïque, l'égalité identique a lieu entre les diverses expressions directes de chaque dérivée principale des classes* $1, 2, \ldots, j$, *toutes les expressions directes d'une dérivée déterminée de classe* $j+1$ *obtenues en partant d'une même équation du système proposé, sont nécessairement identiques.*

La dérivée de classe $j+1$ dont parle l'énoncé coïncide nécessairement, soit avec le premier membre de l'équation d'où l'on doit partir, soit avec quelque dérivée de ce premier membre.

Dans le premier cas, l'équation considérée ne peut fournir, pour la dérivée de classe $j+1$ qui figure dans son premier membre, qu'une seule expression directe, son second membre.

Dans le second cas, que nous allons maintenant examiner, la formation des expressions directes visées par l'énoncé nécessite, sur l'équation d'où l'on part, certaines différentiations qui ont toujours lieu, dans divers ordres, par rapport aux mêmes variables respectives; tantôt on n'effectue de substitutions qu'après la dernière d'entre elles, tantôt on en effectue en outre après *une* des différentiations précédentes. Il s'agit d'établir que, de quelque façon qu'on procède, on arrivera toujours, pour la dérivée considérée de classe $j+1$, à la même expression directe.

1° En premier lieu, si l'on n'opère de substitutions qu'après la dernière différentiation, les expressions directes auxquelles on est conduit pour la dérivée en question sont identiquement égales: car l'expression primitive résultant des seules différentiations est indépendante de l'ordre

dans lequel on les exécute, et, pour chacune des dérivées principales, de classes nécessairement inférieures à $j+1$, qui y figurent, les diverses expressions directes, à plus forte raison les diverses expressions ultimes, sont par hypothèse identiques.

2° Si l'on ne change pas l'ordre relatif des différentiations, les expressions directes auxquelles on est conduit sont encore identiquement égales.

Désignons par ($\mathfrak{a}$) l'équation du système donné d'où l'on doit partir, par k le nombre des différentiations successives, exécutées sur ($\mathfrak{a}$) dans un ordre invariable, par ∂ la dérivée principale que l'exécution des $k-1$ premières amènerait dans le premier membre, et par x la variable indépendante par rapport à laquelle la $k^{\text{ième}}$ différentiation doit avoir lieu: cette dernière, et *éventuellement une des précédentes*, doit être suivie de substitutions, et c'est l'exécution ou la non-exécution de cette partie éventuelle du calcul, comme aussi le moment où elle est effectuée, qui constituent les circonstantes variables de l'opération actuellement considérée. Or, je vais établir que le résultat final auquel on est conduit est, quelles que soient ces circonstances variables, identique au résultat fourni par une opération bien déterminée que je vais d'abord décrire.

Observons à cet effet que, $\frac{\partial \partial}{\partial x}$ étant de classe $j+1$, ∂ est au plus de classe j (8). Cela étant, l'opération dont je veux parler consiste à prendre la relation directe (unique) dont le premier membre est ∂, à la différentier par rapport à x, et à remplacer ensuite, dans le second membre de la relation résultante, chacune des dérivées principales, de classes nécessairement inférieures à $j+1$, qui y figurent, par son expression ultime (unique).

En effet, une semblable opération donne un résultat évidemment identique au résultat fourni par celle dont nous avons parlé antérieurement, si, dans cette dernière, la $k^{\text{ième}}$ différentiation doit être exécutée sur une relation ultime, et il reste alors à examiner le cas où la $k^{\text{ième}}$ différentiation doit être exécutée, non plus sur une relation ultime, mais sur une relation ultime *déjà différentiée*. Soit donc

$$\partial = f(x, y, \ldots, \sigma, \ldots, \tau, \ldots) \tag{28}$$

la relation dont il s'agit, où $\sigma, \ldots$ désignent les diverses dérivées principales figurant *effectivement* dans le second membre, et $\tau, \ldots$ les diverses inconnues ou dérivées paramétriques y figurant aussi *effectivement*. La

relation (28) étant normale (II), les quantités $\sigma, \ldots, \tau, \ldots$ ont une cote première au plus égale à celle de δ, et par suite inférieure à celle de $\frac{\partial \delta}{\partial x}$; elles sont donc toutes normales vis à vis de $\frac{\partial \delta}{\partial x}$. D'autre part, les quantités $\sigma, \ldots$ et $\tau, \ldots$ étant normales vis à vis de δ, les quantités $\frac{\partial \sigma}{\partial x}, \ldots$ et $\frac{\partial \tau}{\partial x}, \ldots$ le sont vis à vis de $\frac{\partial \delta}{\partial x}$ (6). Enfin, puisque $\frac{\partial \delta}{\partial x}$ est de classe $j+1$, les dérivées $\sigma, \ldots, \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \ldots,$ et celles d'entre les dérivées $\frac{\partial \tau}{\partial x}, \ldots$ qui sont principales, sont au plus de la classe j, et par suite chacune d'elles a une expression directe unique, qui se trouve être, à plus forte raison, son expression ultime unique. Désignons alors par

$$\Sigma, \ldots, \Sigma_x, \ldots$$

les expressions directes de

$$\sigma, \ldots, \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \ldots;$$

par $\left[\frac{\partial \Sigma}{\partial x}\right], \ldots$ les résultats que donne la règle des fonctions composées quand on effectue sur $\Sigma, \ldots$ une différentiation relative à x; enfin par $\left[\left[\frac{\partial \Sigma}{\partial x}\right]\right], \ldots$ les résultats respectivement déduits de $\left[\frac{\partial \Sigma}{\partial x}\right], \ldots$ en éliminant de ces dernières expressions les dérivées principales, de classes nécessairement inférieures à j, qui peuvent y figurer: il est clair, puisque les dérivées $\frac{\partial \sigma}{\partial x}, \ldots$ sont au plus de la classe j, que les expressions directes $\left[\left[\frac{\partial \Sigma}{\partial x}\right]\right], \ldots$ sont respectivement identiques aux expressions directes $\Sigma_x, \ldots$.

Cela posé, exécutons sur la relation (28) les opérations qui restent à exécuter, c'est à dire la différentiation relative à x, et ensuite l'élimination des dérivées principales du second membre. Il suffit pour cela de considérer la relation

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x} + \ldots,$$

et de remplacer dans le second membre, d'une part les dérivées principales

$$\sigma, \ldots, \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \ldots$$

par leurs expressions ultimes

$$\Sigma, \ldots, \Sigma_x, \ldots,$$

d'autre part celles d'entre les dérivées $\frac{\partial \tau}{\partial x}, \ldots$ qui sont principales par les expressions ultimes correspondantes. Or, en vertu des identités

$$\Sigma_x = \left[\left[\frac{\partial \Sigma}{\partial x}\right]\right], \ldots,$$

il revient évidemment au même de différentier par rapport à x la relation

$$\delta = f(x, y, \ldots, \Sigma, \ldots, \tau, \ldots)$$

(relation directe unique ayant pour premier membre δ), ce qui donne

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \Sigma}\left[\frac{\partial \Sigma}{\partial x}\right] + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x} + \ldots,$$

puis de remplacer par leurs expressions ultimes les dérivées principales qui peuvent alors figurer dans le second membre.

3° Considérons deux quelconques des expressions directes dont le présent alinéa IV a pour but de démontrer l'identité, et qui se déduisent, comme nous l'avons expliqué, par différentiations et substitutions, d'une même équation du système. Si, sans changer de part ni d'autre l'ordre relatif des différentiations, on n'opère de substitutions qu'après la dernière d'entre elles, on tombe sur deux expressions directes respectivement identiques aux deux précédentes (2°), et l'on sait d'ailleurs (1°) qu'en procédant ainsi, le résultat est indépendant de l'ordre des différentiations.

V. *Si, dans un système orthoïque, l'égalité identique a lieu, d'une part entre les diverses expressions directes de chaque dérivée principale des classes* $1, 2, \ldots, j$, *d'autre part entre les diverses expressions ultimes de chaque dérivée cardinale de la classe* $j+1$, *les deux expressions directes d'une même dérivée principale de classe* $j+1$ *obtenues en partant de deux équations différentes du système proposé sont nécessairement identiques.*

Supposons, pour fixer les idées, que ce soit la fonction u dont certaines dérivées figurent dans les premiers membres des deux équations consi-

dérées. Pour passer de la fonction u à l'une ou à l'autre de ces deux dérivées, il faut exécuter sur elle certaines différentiations, dont quelques-unes peuvent être les mêmes de part et d'autre. Nous désignerons par le symbole $D.$ l'ensemble de ces différentiations communes, et par les symboles $D'.$, $D''.$ l'ensemble des différentiations restantes pour la première et la seconde dérivée respectivement. Les deux équations peuvent donc s'écrire:

$$D.D'.u = \dots, \tag{29}$$

$$D.D''.u = \dots. \tag{30}$$

Cela posé, la dérivée de classe $j+1$ dont parle l'énoncé coïncide soit avec $D.D'.D''.u$, soit avec quelque dérivée de $D.D'.D''.u$, puisqu'elle est une résultante (17) des premiers membres de (29) et (30). — Dans le premier cas, en vertu de l'alinéa précédent IV, les opérations à effectuer soit sur l'équation (29), soit sur l'équation (30), pour en déduire une expression directe de $D.D'.D''.u$, pourront l'être comme il suit: on exécutera d'abord la différentiation $D''.$ s'il s'agit de l'équation (29), la différentiation $D'.$ s'il s'agit de l'équation (30), et l'on remplacera ensuite, dans les seconds membres des formules résultantes, les dérivées principales des classes $1, 2, \dots, j$ par leurs expressions ultimes. Or, ce mécanisme engendre précisément deux expressions ultimes de la dérivée cardinale $D.D'.D''.u$, de classe $j+1$, c'est à dire deux expressions qui, par hypothèse, sont identiquement égales l'une à l'autre. — Si la dérivée de classe $j+1$ dont parle l'énoncé coïncide avec quelque dérivée de $D.D'.D''.u$, les opérations à effectuer soit sur l'équation (29), soit sur l'équation (30), pour en déduire une expression directe de la dérivée en question, pourront l'être comme il suit: 1° on effectuera d'abord la différentiation $D''.$ s'il s'agit de la première, la différentiation $D'.$ s'il s'agit de la seconde, et l'on remplacera les dérivées principales figurant dans les seconds membres par leurs expressions ultimes; 2° on exécutera ensuite les différentiations restantes, qui sont les mêmes de part et d'autre, et l'on éliminera finalement des seconds membres les dérivées principales. Or $D.D'.D''.u$ étant, dans le cas actuel, de classe inférieure à $j+1$ (8), il résulte encore de nos hypothèses que les résultats sont identiques après la première partie de l'opération, par suite aussi après la seconde.

VI. Comme nous l'avons déjà remarqué (III), chaque dérivée principale de première classe ne possède, dans un système orthoïque quelconque, qu'une seule expression directe. Si donc on suppose que les diverses expressions ultimes de chaque dérivée cardinale sont identiquement égales, l'application répétée des propositions ci-dessus (IV), (V) prouve que l'égalité identique entre les diverses expressions directes d'une même dérivée principale a encore lieu dans la deuxième classe, puis dans la troisième, et ainsi de suite indéfiniment. *Il n'y a*, dès lors, *pour une même dérivée principale quelconque, qu'une seule expression directe, et à plus forte raison qu'une seule expression ultime*, ce que nous voulions établir (I).

19. Si l'on partage en groupes les équations d'un système orthoïque, suivant celles d'entre les fonctions inconnues $u, v, \ldots$ dont quelque dérivée figure dans leurs premiers membres, à un groupe formé d'une seule équation ne correspondra aucune condition de passivité. En particulier, *si chaque groupe ne contient qu'une seule équation, le système sera nécessairement passif.*

Enfin, *si, dans un système orthoïque passif, on supprime les diverses équations dont les premiers membres, comparés à ceux de telles ou telles autres, en peuvent être considérés comme des dérivées, le système résultant admet les mêmes intégrales que le premier, et possède, comme lui, la forme orthoïque passive.* Effectivement, les dérivées respectivement principales et paramétriques seront les mêmes de part et d'autre; les relations primitives du second système concorderont numériquement, comme celles du premier, par rapport à des données initiales arbitraires, et fourniront, pour chaque dérivée principale, la même valeur initiale; enfin, les développements des intégrales hypothétiques étant de part et d'autre identiques, leur convergence ne pourra avoir lieu d'un côté sans avoir lieu en même temps de l'autre.

20. Dans un système orthoïque, supposé passif, la concordance numérique des relations primitives a lieu pour des données initiales quelconques, et, d'après ce que nous avons dit plus haut (14), la question de savoir si les intégrales hypothétiques répondant à des conditions initiales données existent effectivement, se résout par l'affirmative dans le cas où leurs développements construits *a priori* sont tous convergents, par la

négative dans le cas contraire. Comme nous allons le prouver par divers exemples, cette convergence n'a pas nécessairement lieu, d'où résulte que, *dans les systèmes orthoïques passifs, il est impossible d'affirmer d'une manière générale l'existence d'intégrales répondant à des données initiales arbitraires.*

I. Considérons d'abord l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{31}$$

où u désigne une fonction inconnue des deux variables indépendantes x et y.[1] Cette équation constitue un système orthoïque, comme on le voit en attribuant à u la cote zéro, à x la cote 3 et à y la cote 1; d'ailleurs, un pareil système est nécessairement passif, puisqu'il est composé d'une seule équation (19); enfin, les dérivées paramétriques de u sont celles qui se rapportent à la seule variable y, en sorte qu'une intégrale hypothétique se trouve entièrement déterminée par la condition de se réduire à une fonction donnée de y pour $x = x_0$.

Pour construire *a priori* le développement de l'intégrale hypothétique se réduisant à $\varphi(y)$ pour $x = 0$, on remarquera que l'équation (31) entraine comme conséquence nécessaire

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = \frac{\partial^{2\alpha+\beta} u}{\partial y^{2\alpha+\beta}}. \tag{32}$$

Effectivement, si $\alpha = 0$, l'équation (32) se réduit à une identité. En différentiant (31) β fois par rapport à y, il vient

$$\frac{\partial^{1+\beta} u}{\partial x \partial y^\beta} = \frac{\partial^{2+\beta} u}{\partial y^{2+\beta}}, \tag{33}$$

et la relation (32) se trouve vérifiée pour $\alpha = 1$. Si l'on suppose main-

---

[1] Mme de Kowalevsky, dans l'exemple de divergence qu'elle a donné (Journal de Crelle, tome 80), considère cette même équation $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, en assujettissant l'intégrale hypothétique à se réduire, pour $x = 0$, à la fonction méromorphe $\frac{1}{1-y}$; comme on le verra plus bas, la détermination initiale dont nous avons fait choix est exprimable par une série entière indéfiniment convergente.

tenant cette relation établie pour une valeur quelconque de α, et qu'on la différentie une fois par rapport à x, elle donne

$$\frac{\partial^{(\alpha+1)+\beta}u}{\partial x^{\alpha+1}\partial y^{\beta}}=\frac{\partial^{1+(2\alpha+\beta)}u}{\partial x\partial y^{2\alpha+\beta}};$$

on a d'ailleurs, en vertu de (33),

$$\frac{\partial^{1+(2\alpha+\beta)}u}{\partial x\partial y^{2\alpha+\beta}}=\frac{\partial^{2+2\alpha+\beta}u}{\partial y^{2+2\alpha+\beta}}=\frac{\partial^{2(\alpha+1)+\beta}u}{\partial y^{2(\alpha+1)+\beta}},$$

et il vient en conséquence

$$\frac{\partial^{(\alpha+1)+\beta}u}{\partial x^{\alpha+1}\partial y^{\beta}}=\frac{\partial^{2(\alpha+1)+\beta}u}{\partial y^{2(\alpha+1)+\beta}},$$

relation qui se déduit de (32) par le changement de α en $\alpha+1$.

Cela étant, le développement que nous cherchons à construire a pour terme général

$$\frac{\varphi^{(2\alpha+\beta)}(0)}{1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta}x^{\alpha}y^{\beta}. \tag{34}$$

Or, je vais faire voir qu'en choisissant convenablement $\varphi(y)$, on tombe sur un développement divergent.

A. Si l'on pose $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$, la quantité $\frac{S_n}{n}$ tend vers zéro pour n infini.

D'abord, cette variante diminue toujours lorsque n augmente, car l'inégalité

$$\frac{S_n}{n}>\frac{S_{n+1}}{n+1}$$

revient à

$$(n+1)S_n>nS_{n+1},$$

ou

$$(n+1)S_n>n\left(S_n+\frac{1}{n+1}\right),$$

ou

$$S_n>\frac{n}{n+1},$$

ce qui est évident.

Observons en second lieu que si, dans la série $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$, on désigne par σ_1 le *premier* terme, par σ_2 la somme des *deux* termes suivants, par σ_3 la somme des *trois* termes qui viennent à la suite de ceux-ci, etc., chaque terme élémentaire de σ_k est inférieur à $\frac{1}{k}$, et que par suite σ_k est inférieur à 1. On a donc

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_k < k,$$

ou

$$S_{\frac{k(k+1)}{2}} < k.$$

On déduit de là

$$\frac{S_{\frac{k(k+1)}{2}}}{\frac{k(k+1)}{2}} < \frac{2}{k+1},$$

inégalité dont le second membre, et à plus forte raison le premier, tendent vers zéro pour k infini.

Ainsi, on peut trouver pour n des valeurs telles, que la quantité positive $\frac{S_n}{n}$ tombe au dessous de toute quantité donnée; comme d'un autre côté elle diminue toujours lorsque n augmente, elle tend nécessairement vers zéro.

B. La série entière

$$(35) \qquad 1 + \frac{S_1}{2}x^2 + \frac{S_1 S_2}{3 \cdot 4}x^4 + \dots + \frac{S_1 S_2 \dots S_n}{(n+1)(n+2)\dots 2n}x^{2n} + \dots,$$

où S_n garde la même signification que ci-dessus ***A***, est indéfiniment convergente.

Car dans la série formée par les modules de ses termes, le rapport d'un terme au précédent a pour valeur

$$\frac{S_{n+1}}{2(2n+1)}(\mathrm{mod}\, x)^2$$

ou

$$\frac{S_{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n+1}{2(2n+1)} \cdot (\mathrm{mod}\, x)^2,$$

produit de trois facteurs dont le premier tend vers zéro et le second vers $\frac{1}{4}$, tandis que le troisième reste invariable; le rapport considéré tend donc lui-même vers zéro.

C. En désignant par $\psi(x)$ la fonction définie par la somme de la série (35), et prenant $\varphi(y) = \psi(y)$, la série entière en x et y qui a pour terme général (34) n'admet aucun système de rayons de convergence.

Car, dans cette dernière série, la partie indépendante de y a pour terme général

$$\frac{\psi^{(2\alpha)}(0)}{1 \cdot 2 \dots \alpha} x^\alpha = S_1 S_2 \dots S_\alpha x^\alpha,$$

et le rapport

$$\frac{S_1 S_2 \dots S_\alpha S_{\alpha+1} x^{\alpha+1}}{S_1 S_2 \dots S_\alpha x^\alpha} = x S_{\alpha+1}$$

a un module infini avec α, quelque valeur particulière (non nulle) que l'on attribue à x.

II. *En désignant par u une fonction inconnue des deux variables indépendantes x et y, par μ une constante positive quelconque, et par q un entier au moins égal à 2, l'équation différentielle partielle*

$$(36) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \mu\Big[1 + y + y^2 + \dots + y^q + (1 + y + y^2 + \dots + y^q + y^{q+1})\frac{\partial^q u}{\partial y^q}\Big]$$

n'admet pas d'intégrale se réduisant, pour $x = 0$, à une fonction de y identiquement nulle.

L'équation (36) constitue un système orthoïque, comme on le voit en attribuant à u la cote zéro, à x la cote $q + 1$, et à y la cote 1; un pareil système, composé d'une seule équation, est d'ailleurs nécessairement passif; enfin, une intégrale hypothétique se trouve, comme dans l'exemple précédent (I), entièrement déterminée par la condition de se réduire à une fonction donnée de y pour $x = x_0$. Je me propose de démontrer qu'il n'existe pas d'intégrale se réduisant, pour $x = 0$, à une fonction de y identiquement nulle.

A. Pour effectuer cette démonstration, *on peut à l'équation* (36) *substituer l'équation*

$$(37) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \mu\Big[(1 + y)^q + (1 + y)^{q+1}\frac{\partial^q u}{\partial y^q}\Big].$$

Effectivement, si l'on donne à la constante μ, dans l'équation (36), une valeur positive déterminée, et que l'on considère l'équation

$$(38) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \mu'\left[(1 + y)^q + (1 + y)^{q+1}\frac{\partial^q u}{\partial y^q}\right],$$

il est clair qu'en donnant à μ', dans cette dernière, une valeur positive suffisamment petite, les deux polynomes

$$(39) \qquad \mu(1 + y + y^2 + \ldots + y^q)\ ,\ \mu(1 + y + y^2 + \ldots + y^q + y^{q+1}),$$

qui figurent dans l'équation (36), ont leurs coefficients respectivement supérieurs aux coefficients (positifs) semblables des deux polynomes

$$(40) \qquad \mu'(1 + y)^q\ ,\ \mu'(1 + y)^{q+1},$$

qui figurent dans l'équation (38). Or, si l'on considère cette dernière, les expressions primitives des dérivées principales sont des sommes de produits pouvant contenir comme facteurs quatre sortes de quantités, savoir: certains entiers positifs; certains coefficients des polynomes (40); certaines puissances de y; enfin, certaines dérivées de u. Et, pour l'équation (36), les expressions primitives des mêmes dérivées sont composées exactement de la même façon, à cela près que les coefficients des polynomes (40) se trouvent respectivement remplacés par les coefficients correspondants des polynomes (39), c'est à dire par des quantités positives qui leur sont respectivement supérieures. Cela étant, si l'on choisit pour la fonction u et ses dérivées paramétriques des valeurs initiales toutes nulles, et que l'on calcule les valeurs initiales des dérivées principales, d'abord à l'aide des relations primitives provenant de (36), puis à l'aide des relations primitives provenant de (38), on voit, par un raisonnement trés-simple exécuté de proche en proche d'une classe à la suivante, que les valeurs positives ainsi calculées sont plus grandes dans le premier cas que dans le second.

En conséquence, si l'on parvient à établir pour l'équation (38) la divergence du développement de l'intégrale hypothétique qui répond aux données initiales choisies, cette divergence se trouvera, à plus forte raison, établie pour l'équation (36).

B. *L'équation* (37), *où* $q \geqq 2$, *n'admet pas d'intégrale s'annulant avec* x, *ce qui achève notre démonstration.*

Je désignerai par $P_1, P_2, P_3, \ldots$ des fonctions inconnues de la seule variable y, par $P_1^{(q)}, P_2^{(q)}, P_3^{(q)}, \ldots$ leurs dérivées respectives d'ordre q, et je poserai

$$u = P_1 x + P_2 x^2 + P_3 x^3 + \ldots.$$

L'équation (37) deviendra alors

$$\begin{aligned} & 1 \,.\, P_1 + 2 \,.\, P_2 x + 3 \,.\, P_3 x^2 + \ldots \\ & = \mu(1+y)^q + \mu(1+y)^{q+1}[P_1^{(q)} x + P_2^{(q)} x^2 + P_3^{(q)} x_3 + \ldots], \end{aligned}$$

d'où l'on tire, par l'identification,

$$(41) \qquad \begin{cases} 1 \,.\, P_1 = \mu(1+y)^q, \\ 2 \,.\, P_2 = \mu(1+y)^{q+1} P_1^{(q)}, \\ 3 \,.\, P_3 = \mu(1+y)^{q+1} P_2^{(q)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

On voit de proche en proche que

$$P_1, P_1^{(q)}, P_2, P_2^{(q)}, P_3, P_3^{(q)}, \ldots$$

ont respectivement les formes

$$\mu_1(1+y)^q, \mu_1', \mu_2(1+y)^{q+1}, \mu_2'(1+y), \mu_3(1+y)^{q+2}, \mu_3'(1+y)^2, \ldots,$$

et d'une façon générale que P_n est de la forme

$$\mu_n(1+y)^{q+n-1},$$

où μ_n désigne une certaine constante positive. Il faut démontrer que, les polynomes $P_1, P_2, P_3, \ldots$ étant ainsi déterminés, la série entière en x et y fournie par le développement de $P_1 x + P_2 x^2 + P_3 x^3 + \ldots$ n'admet aucun système de rayons de convergence.

Or, en désignant par P un polynome de la forme $\theta.(1+y)^h$, où $\theta > 0$ et $h \geqq q$, et par ϖ, $\varpi^{(q)}$ les valeurs numériques que prennent, pour $y = 0$, ce polynome et sa dérivée d'ordre q, on a

$$(42) \qquad \varpi^{(q)} > (h - q + 1)^q \varpi;$$

car des relations

$$\varpi = \theta, \qquad \varpi^{(q)} = h(h-1)\ldots(h-q+1)\theta$$

on tire

$$\varpi^{(q)} = h(h-1)\ldots(h-q+1)\varpi,$$

d'où l'on déduit immédiatement la relation (42).

Si l'on détermine maintenant des constantes $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$ par les relations

$$(43) \qquad \begin{cases} 1\cdot\rho_1 = \mu, \\ 2\cdot\rho_2 = \mu\cdot 1^q\rho_1, \\ 3\cdot\rho_3 = \mu\cdot 2^q\rho_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ n\cdot\rho_n = \mu\cdot(n-1)^q\rho_{n-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

on a, en désignant par ϖ_n la valeur numérique que prend, pour $y = 0$, le polynome P_n,

$$(44) \qquad \varpi_n > \rho_n.$$

Effectivement, les relations (41) et (43) nous donnent d'abord

$$1\cdot\varpi_1 = \mu = 1\cdot\rho_1, \quad \text{d'où} \quad \varpi_1 = \rho_1;$$

puis

$$2\cdot\varpi_2 = \mu^2\cdot 1\cdot 2\ldots q, \qquad 2\cdot\rho_2 = \mu^2, \quad \text{d'où} \quad \varpi_2 > \rho_2;$$

et il nous suffit alors de faire voir qu'en supposant la relation (44) vérifiée pour une valeur quelconque de n, elle l'est encore pour la valeur suivante $n+1$. Or, on a

$$(n+1)\rho_{n+1} = \mu n^q\rho_n;$$

on a d'autre part, en désignant par $\varpi_n^{(q)}$ la valeur numérique que prend, pour $y = 0$, la dérivée d'ordre q du polynome P_n,

$$(n+1)\varpi_{n+1} = \mu\varpi_n^{(q)},$$

puis, en vertu de (42),

$$\varpi_n^{(q)} > n^q\varpi_n,$$

puis, en vertu de l'hypothèse,

$$\varpi_n > \rho_n,$$

relations de la combinaison desquelles on déduit

$$(n+1)\varpi_{n+1} > \mu n^q \rho_n,$$

c'est à dire

$$(n+1)\varpi_{n+1} > (n+1)\rho_{n+1} \quad \text{ou} \quad \varpi_{n+1} > \rho_{n+1}.$$

On a donc bien, quel que soit n, $\varpi_n > \rho_n$.

Cela posé, la série $\Sigma\rho_n x^n$ est divergente pour toute valeur non nulle attribuée à x: car on a, en multipliant membre à membre les n premières relations (43),

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n\rho_n = \mu^n 1^q \cdot 2^q \ldots (n-1)^q,$$

d'où

$$\rho_n x^n = (\mu x)^n \frac{1^q \cdot 2^q \ldots (n-1)^q}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)n},$$

et le rapport

$$\frac{\rho_{n+1}x^{n+1}}{\rho_n x^n} = \mu x \frac{n^q}{n+1}$$

a un module infini avec n, puisque q est, par hypothèse, au moins égal à 2. Il en résulte, à cause de (44), que la série $\Sigma\varpi_n x^n$, partie indépendante de y dans la série entière en x et y provenant de

$$P_1 x + P_2 x^2 + P_3 x^3 + \ldots,$$

est elle-même divergente.

III. La divergence éventuelle des intégrales hypothétiques des systèmes orthoïques pourrait encore s'établir à l'aide des exemples suivants, que nous nous bornerons à formuler.

En désignant par u une fonction inconnue des deux variables indépendantes x et y, par μ une constante positive quelconque, et par q un entier au moins égal à 2, aucune des équations différentielles partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\left[1 + (1 + y)u + (1 + y + y^2)\frac{\partial^q u}{\partial y^q}\right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\left[1 + (1 + y + y^2)u + (1 + y)\frac{\partial^q u}{\partial y^q}\right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\left[1 + (1 + y + y^2 + y^3)u + \frac{\partial^q u}{\partial y^q}\right]$$

n'admet d'intégrale se réduisant, pour $x = 0$, à une fonction de y identiquement nulle.

En attribuant à u, x, y, μ la même signification que ci-dessus, et désignant par q un entier au moins égal à 3, l'équation différentielle partielle

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\left[1 + (1 + y + y^2)u + \frac{\partial^q u}{\partial y^q}\right]$$

n'admet pas non plus d'intégrale qui satisfasse à cette condition initiale.

TROISIÈME PARTIE.

Systèmes orthonomes; convergence des développements des intégrales.

21. Un système orthoïque (9) sera dit *orthonome* dans le cas, particulièrement remarquable, où les cotes *premières* des diverses variables indépendantes se trouvent être toutes égales à un même entier (positif).

Exemple I. Dans son Mémoire sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles, M[me] de KOWALEVSKY considère un système composé d'équations en nombre égal à celui des inconnues, et tel, qu'en désignant par

$$u_1, u_2, \ldots, u_g$$

les inconnues dont il s'agit, et par

$$k_1, k_2, \ldots, k_g$$

les ordres respectifs du système par rapport à elles, ce dernier soit résoluble par rapport aux dérivées

$$\frac{\partial^{k_1} u_1}{\partial x^{k_1}}, \frac{\partial^{k_2} u_2}{\partial x^{k_2}}, \ldots, \frac{\partial^{k_g} u_g}{\partial x^{k_g}},$$

toutes relatives à une même variable x. Or, il est aisé de voir que, cette résolution une fois effectuée, le système résultant satisfait à notre définition de l'orthonomie.

En premier lieu, le système se trouve résolu par rapport à certaines dérivées, qui ne figurent, non plus que leurs propres dérivées, dans aucun des seconds membres.

Attribuons d'autre part:

1° *à toutes les variables indépendantes une cote première égale à* 1, et aux fonctions inconnues $u_1, u_2, \ldots, u_g$ les cotes premières $-k_1, -k_2, \ldots, -k_g$;

2° à la variable x une cote seconde égale à 1, à toutes les autres variables une cote seconde nulle, et aux fonctions inconnues $u_1, u_2, \ldots, u_g$ les cotes secondes $-k_1, -k_2, \ldots, -k_g$.

Si l'on désigne par i, j deux entiers, distincts ou non, pris dans la suite $1, 2, \ldots, g$, et que l'on considère l'équation du système qui a pour premier membre $\frac{\partial^{k_i} u_i}{\partial x^{k_i}}$, le second membre de l'équation dont il s'agit peut, d'après la définition des systèmes de Mme de Kowalevsky, contenir la fonction u_j et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre k_j inclusivement, à l'exception de la dérivée $\frac{\partial^{k_j} u_j}{\partial x^{k_j}}$. Or, la cote première du premier membre est zéro, et les cotes premières de u_j et de ses dérivées d'ordres $1, 2, \ldots, k_j$ sont respectivement égales aux quantités

$$-k_j, -k_j + 1, -k_j + 2, \ldots, -k_j + k_j,$$

lesquelles sont toutes inférieures à zéro, à l'exception de la dernière qui est nulle. D'un autre côté, la cote seconde du premier membre est encore zéro, et la cote seconde d'une dérivée d'ordre k_j de u_j figurant au second membre est au plus égale à

$$-k_j + (k_j - 1) = -1 < 0,$$

puisque, dans la formation de cette dérivée, il y a au plus $k_j - 1$ différentiations relatives à la variable x.

Si donc on désigne par c_1, c_2 les cotes première et seconde du premier membre, et par c'_1, c'_2 celles d'une inconnue ou dérivée figurant au second membre, on aura nécessairement, ou bien

$$c_1 - c'_1 > 0,$$

ou bien

$$c_1 - c'_1 = 0, \qquad c_2 - c'_2 > 0.$$

Nous avons d'ailleurs choisi pour les diverses variables indépendantes des cotes premières toutes égales entre elles.

Exemple II. Désignant par $u, v, \ldots, w$ certaines fonctions inconnues des variables indépendantes $x, y, \ldots, s, t$, nous adopterons pour celles-ci un ordre déterminé, par exemple

$$x, y, \ldots, s, t, \tag{45}$$

et de même pour les inconnues un ordre déterminé, par exemple

$$u, v, \ldots, w. \tag{46}$$

Puis, nous rangerons comme il suit, sur une ligne indéfinie allant de droite à gauche, les dérivées de tous ordres des diverses fonctions inconnues. Nous écrirons d'abord l'ensemble des dérivées premières, puis à gauche de celui-ci l'ensemble des dérivées secondes, puis à gauche de ce dernier l'ensemble des dérivées troisièmes, et ainsi de suite indéfiniment. Chaque ensemble sera ensuite divisé en ensembles partiels, dont le premier à gauche contiendra les dérivées appartenant à la fonction u, le suivant les dérivées appartenant à la fonction v, et ainsi jusqu'au dernier qui contiendra les dérivées appartenant à la fonction w. En désignant maintenant par $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu$ les ordres partiels d'une dérivée quelconque relatifs à $x, y, \ldots, s, t$ respectivement, chacun des ensembles résultants sera lui-même divisé en ensembles partiels se succédant de gauche à droite d'après les valeurs décroissantes de l'ordre partiel α; chaque sous-ensemble en sous-ensembles partiels se succédant de gauche à droite d'après les valeurs décroissantes de l'ordre partiel β; et ainsi jusqu'à l'ordre partiel λ (inclusivement). Chacun des ensembles définitifs

se compose alors d'une dérivée unique, et les dérivées de tous ordres de nos fonctions inconnues se trouvent rangées, sur une ligne indéfinie allant de droite à gauche, dans un ordre bien déterminé. Nous qualifierons de *taxique* la suite ainsi obtenue, et nous dirons qu'une dérivée de fonction inconnue est *antérieure* ou *postérieure* à une autre, selon que, dans la suite taxique, elle figure à gauche ou à droite de cette autre.

Cela étant, un système différentiel sera dit *taxique*, s'il se trouve résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues qu'il implique, et si l'on peut trouver, pour les variables et les inconnues, deux ordres respectifs, (45), (46), tels, que chaque second membre ne contienne, outre les variables et les inconnues, que des dérivées paramétriques postérieures au premier membre correspondant.[1]

Or, un pareil système est nécessairement orthonome.

Effectivement, si une dérivée de fonction inconnue est antérieure à une autre, il arrive forcément de trois choses l'une:

ou bien elle est d'ordre supérieur à cette autre;

ou bien elle est de même ordre, mais la fonction inconnue à laquelle elle appartient précède, dans la suite (46), la fonction inconnue à laquelle appartient cette autre;

ou bien enfin, les deux dérivées considérées sont de même ordre et appartiennent à une même fonction inconnue, mais en désignant par

$$\alpha' \, , \beta' \, , \ldots , \lambda' \, , \mu' \, ,$$
$$\alpha'' , \beta'' , \ldots , \lambda'' , \mu''$$

leurs ordres partiels relatifs à

$$x \, , y \, , \ldots , s \, , t \, ,$$

les différences

$$\alpha' - \alpha'' , \beta' - \beta'' , \ldots , \lambda' - \lambda''$$

ne sont pas toutes nulles, et la première d'entre elles qui ne s'évanouit pas est positive.

Cela étant, et en désignant par h le nombre des variables indé-

[1] Il va sans dire que les seconds membres sont supposés tous développables dans un même domaine.

pendantes, il suffit, pour se convaincre de la nature orthonome d'un système taxique, d'attribuer:

aux variables des cotes premières toutes égales à 1, et aux inconnues des cotes premières toutes nulles;

aux variables des cotes secondes toutes nulles, et aux inconnues successives $u, v, \ldots, w$ des cotes secondes dont la valeur aille en décroissant;

aux variables et aux inconnues des cotes troisièmes toutes nulles, à l'exception de x qui aura pour cote troisième l'unité;

aux variables et aux inconnues des cotes quatrièmes toutes nulles, à l'exception de y qui aura pour cote quatrième l'unité;

etc.;

finalement, aux variables et aux inconnues des cotes $(h+1)^{\text{ièmes}}$ toutes nulles, à l'exception de l'avant dernière variable s, qui aura pour cote $(h+1)^{\text{ième}}$ l'unité.

Car toute dérivée postérieure à une autre est alors normale vis à vis de cette autre; les inconnues elles-mêmes le sont évidemment vis à vis d'une dérivée quelconque; enfin, les cotes premières des diverses variables indépendantes ont été choisies égales entre elles.

22. *Tout système orthonome passif est complètement intégrable, c'est à dire admet un groupe (unique) d'intégrales ordinaires répondant à des données initiales arbitrairement choisies.*

Tout revient, comme nous l'avons vu (15), à prouver la convergence des développements des intégrales hypothétiques.

I. Si les fonctions $f(x, y, \ldots)$, $\varphi(x, y, \ldots)$ sont toutes deux développables dans quelque domaine des valeurs $x_0, y_0, \ldots$, si de plus les valeurs de $\varphi(x, y, \ldots)$ et de toutes ses dérivées en $x_0, y_0, \ldots$ sont réelles, positives, et supérieures aux modules des valeurs correspondantes de $f(x, y, \ldots)$ et de ses dérivées semblables, la fonction φ sera dite *majorante* de f par rapport aux valeurs $x_0, y_0, \ldots$.

II. *Soient*

$f(x, y, \ldots)$ *une fonction développable dans un domaine des valeurs* $x_0, y_0, \ldots$;

$r_x, r_y, \ldots$ des constantes positives respectivement inférieures aux rayons de ce domaine;

M une constante positive supérieure à celle qu'on obtient en remplaçant dans le développement de $f(x, y, \ldots)$, effectué à partir de $x_0, y_0, \ldots$, tous les coefficients par leurs modules, et les différences $x - x_0, y - y_0, \ldots$ par les quantités respectives $r_x, r_y, \ldots$;

$\alpha_x, \alpha_y, \ldots$ des constantes positives supérieures ou égales à $\frac{1}{r_x}, \frac{1}{r_y}, \ldots$ respectivement;

enfin m un entier positif.

Cela étant, la fonction

$$\Psi(x, y, \ldots) = \frac{M}{[1 - \alpha_x(x - x_0) - \alpha_y(y - y_0) - \ldots]^m}$$

est majorante pour $f(x, y, \ldots)$ relativement aux valeurs $x_0, y_0, \ldots$.

III. *Si l'on désigne par $u, v, \ldots, w$ des fonctions inconnues de la variable indépendante x, et par*

$$F_u(x, u, v, \ldots, w), F_v(x, u, v, \ldots, w), \ldots, F_w(x, u, v, \ldots, w)$$

des composantes[1] *données, développables dans un domaine des valeurs $x_0, u_0, v_0, \ldots, w_0$, le système des équations différentielles*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = F_u(x, u, v, \ldots, w), \\ \frac{\partial v}{\partial x} = F_v(x, u, v, \ldots, w), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial w}{\partial x} = F_w(x, u, v, \ldots, w) \end{cases}$$

---

[1] Si aux variables $s, t, \ldots$ d'une fonction $f(s, t, \ldots)$ on substitue respectivement autant de fonctions $S(z, \ldots), T(z, \ldots), \ldots$ des variables $z, \ldots$, ces dernières fonctions $S(z, \ldots), T(z, \ldots), \ldots$ sont dites *simples*, la première $f(s, t, \ldots)$ s'appelle la fonction *composante*, et le résultat de leur combinaison

$$f[S(z, \ldots), T(z, \ldots), \ldots]$$

porte le nom de fonction *composée*.

admet un groupe d'intégrales $u, v, \ldots, w$, *développables dans un domaine de la valeur* x_0, *et se réduisant, pour* $x = x_0$, *aux valeurs respectives* u_0, $v_0, \ldots, w_0$.

IV. Considérons le système différentiel

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = H_u, \qquad \frac{\partial^\beta v}{\partial x^\beta} = H_v, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^\lambda w}{\partial x^\lambda} = H_w,$$

où $u, v, \ldots, w$ désignent des fonctions inconnues de la variable indépendante x; $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ des entiers positifs quelconques; et $H_u, H_v, \ldots, H_w$ des fonctions données de toutes les quantités

$$(47) \qquad x, \quad \begin{cases} u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial^{\alpha-1} u}{\partial x^{\alpha-1}}, \\ v, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial^{\beta-1} v}{\partial x^{\beta-1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ w, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial^{\lambda-1} w}{\partial x^{\lambda-1}}. \end{cases}$$

Si les fonctions $H_u, H_v, \ldots, H_w$ *sont développables dans un domaine des valeurs*

$$(48) \qquad x_0, \quad \begin{cases} u_0, \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_0, \ldots, \left(\dfrac{\partial^{\alpha-1} u}{\partial x^{\alpha-1}}\right)_0, \\ v_0, \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)_0, \ldots, \left(\dfrac{\partial^{\beta-1} v}{\partial x^{\beta-1}}\right)_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_0, \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)_0, \ldots, \left(\dfrac{\partial^{\lambda-1} w}{\partial x^{\lambda-1}}\right)_0, \end{cases}$$

le système proposé admet un groupe d'intégrales $u, v, \ldots, w$, *développables dans un domaine de* x_0, *et telles, que, pour* $x = x_0$, *les fonctions* (47) *se réduisent respectivement aux quantités numériques* (48).

Effectivement, le système différentiel proposé équivaut au suivant au point de vue de l'intégration:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u', \quad \frac{\partial u'}{\partial x} = u'', \quad \ldots, \quad \frac{\partial u^{(\alpha-1)}}{\partial x} = H_u,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = v', \quad \frac{\partial v'}{\partial x} = v'', \quad \ldots, \quad \frac{\partial v^{(\beta-1)}}{\partial x} = H_v,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = w', \quad \frac{\partial w'}{\partial x} = w'', \quad \ldots, \quad \frac{\partial w^{(\lambda-1)}}{\partial x} = H_w:$$

il va sans dire que, dans les seconds membres $H_u, H_v, \ldots, H_w$, figurant à l'extrémité des lignes horizontales respectives du tableau ci-dessus, on a substitué aux dérivées

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^{\alpha-1} u}{\partial x^{\alpha-1}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^{\beta-1} v}{\partial x^{\beta-1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^{\lambda-1} w}{\partial x^{\lambda-1}}$$

les nouvelles inconnues respectives

$$u', u'', \ldots, u^{(\alpha-1)},$$

$$v', v'', \ldots, v^{(\beta-1)},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$w', w'', \ldots, w^{(\lambda-1)}.$$

Cela étant, la proposition qui fait l'objet du présent alinéa IV se présente comme une conséquence immédiate du précédent.

V.[1] Revenant au système différentiel que vise notre énoncé général,

---

[1] Les alinéas V, VI, VII, VIII et IX du n° 31 (*infrà*) sont, comme je le répète plus loin (31), identiques aux alinéas correspondants du présent numéro 22, à part quelques modifications que je vais indiquer au fur et à mesure.

partageons-y les fonctions inconnues en catégories suivant la valeur de leurs cotes premières, et supposons, pour fixer les idées, que le nombre des catégories ainsi obtenues soit égal à 3. Les dérivées de tous ordres des inconnues se partagent naturellement alors en trois catégories, suivant qu'elles appartiennent à telle ou telle inconnue.

Cela posé, désignons par γ la valeur commune (positive) des cotes premières attribuées aux diverses variables indépendantes; par $\gamma', \gamma'', \gamma'''$ les cotes premières attribuées aux inconnues des trois catégories respectives; par N l'ordre maximum des premiers membres du système donné; par Γ un entier fixe choisi sous la seule condition d'être à la fois supérieur aux trois quantités

$$\gamma N + \gamma', \ \gamma N + \gamma'', \ \gamma N + \gamma''';$$

enfin, par K', K'', K''' les plus petits entiers qui, substitués à K, vérifient *respectivement* les relations

$$\gamma K + \gamma' \geqq \Gamma, \ \gamma K + \gamma'' \geqq \Gamma, \ \gamma K + \gamma''' \geqq \Gamma.$$

Nous établirons successivement les points suivants:

A. *Les entiers K', K'', K''' sont tous supérieurs à N.*

Effectivement, si l'on avait, par exemple, $K' \leqq N$, on aurait aussi $\gamma K' + \gamma' \leqq \gamma N + \gamma'$, et, comme $\gamma N + \gamma'$ est inférieur à Γ, il viendrait, contrairement à la définition de K',

$$\gamma K' + \gamma' < \Gamma.$$

B. *Les dérivées dont la cote première tombe au dessous de Γ sont: pour la première catégorie, celles d'ordre inférieur à K'; pour la deuxième, celles d'ordre inférieur à K''; pour la troisième, celles d'ordre inférieur à K'''.* (Quant aux inconnues elles-mêmes, leurs cotes premières tombent évidemment au dessous de Γ).

Effectivement, si une dérivée de première catégorie est d'ordre $K < K'$, sa cote première $\gamma K + \gamma'$ est au plus égale à $\gamma(K' - 1) + \gamma'$, par suite inférieure à Γ, en vertu de la définition de K'. Réciproquement, la relation $\gamma K + \gamma' < \Gamma$ entraîne comme conséquence nécessaire $K < K'$: car, si l'on avait $K \geqq K'$, on aurait aussi

$$\gamma K + \gamma' \geqq \gamma K' + \gamma',$$

et, comme $\gamma K' + \gamma'$ est supérieur ou égal à Γ, il viendrait, contrairement à l'hypothèse,

$$\gamma K + \gamma' \geqq \Gamma.$$

C. *Si l'on dresse, par classes croissantes, la liste des dérivées principales des inconnues, et qu'on y supprime toutes les dérivées de première catégorie dont l'ordre est inférieur à K', toutes celles de deuxième catégorie dont l'ordre est inférieur à K'', enfin toutes celles de troisième catégorie dont l'ordre est inférieur à K''', cette suppression équivaut à celle d'un certain nombre de classes en tête de la liste.*

Ce point est évident, si l'on observe d'une part que les dérivées principales supprimées sont celles dont la cote première tombe au dessous de Γ, et si l'on se reporte d'autre part à la classification des dérivées principales (7), (8).

D. *Si l'on considère une relation primitive dont le premier membre soit ou de première catégorie et d'ordre K',*
ou de deuxième catégorie et d'ordre K'',
ou de troisième catégorie et d'ordre K''':

1° *Toute dérivée de fonction inconnue figurant au second membre est d'ordre au plus égal à K', K'' ou K''', suivant que cette même dérivée est de première, seconde ou troisième catégorie.*

2° *Le second membre de la relation considérée est linéaire par rapport à l'ensemble de toutes les dérivées qui sont, soit de première catégorie et d'ordre K', soit de deuxième catégorie et d'ordre K'', soit de troisième catégorie et d'ordre K'''.*

1° Supposons, par exemple, que le premier membre de la relation considérée soit de première catégorie et d'ordre K': sa cote première est alors $\gamma K' + \gamma'$. D'ailleurs une dérivée d'ordre K figurant dans le second membre a pour cote première l'une ou l'autre des trois quantités

$$\gamma K + \gamma' \,,\; \gamma K + \gamma'' \,,\; \gamma K + \gamma''',$$

suivant qu'elle est de première, seconde ou troisième catégorie. Enfin, toute dérivée figurant au second membre a une cote première au plus

égale à celle du premier membre. Nous sommes donc ramenés, pour établir le premier point, à prouver que les relations

$$(49)\quad \gamma K + \gamma' \leqq \gamma K' + \gamma' \ , \ \gamma K + \gamma'' \leqq \gamma K' + \gamma' \ , \ \gamma K + \gamma''' \leqq \gamma K' + \gamma'$$

entraînent *respectivement*, comme conséquence nécessaire,

$$K \leqq K' \ , \ K \leqq K'' \ , \ K \leqq K'''.$$

Or, la première relation (49) entraîne évidemment $K \leqq K'$.

Si la deuxième relation (49) était vérifiée pour quelque valeur de K supérieure à K'', soit $K = K'' + r$, où $r > 0$, on aurait

$$\gamma(K'' + r) + \gamma'' \leqq \gamma K' + \gamma',$$

d'où

$$\gamma(K' - r) + \gamma' \geqq \gamma K'' + \gamma''.$$

et à plus forte raison

$$\gamma(K' - r) + \gamma' \geqq \Gamma,$$

ce qui est contradictoire avec la définition de K'. Donc la deuxième relation (49) entraîne $K \leqq K''$.

On verrait, par un raisonnement semblable, que la troisième entraîne $K \leqq K'''$.

2° Les entiers K', K'', K''' étant tous supérieurs à l'ordre maximum des premiers membres du système donné, la relation primitive que l'on considère se déduit de quelque relation du système donné par une différentiation d'ordre *positif*. Elle a dès lors son second membre linéaire par rapport à l'ensemble des dérivées qu'indique la deuxième partie de l'énoncé ***D***.

VI. Désignons désormais par S le système proposé, et par (S) le système que forment les diverses relations primitives dont les premiers membres sont, ou de première catégorie et d'ordre K', ou de deuxième catégorie et d'ordre K'', ou de troisième catégorie et d'ordre K'''. Il est clair que, dans ces deux systèmes, les dérivées principales et paramétriques des fonctions inconnues sont respectivement les mêmes, à cela près que *les dérivées principales du système S dont la cote première tombait au dessous de Γ, sont devenues paramétriques dans le système* (S); et si l'on

dresse, d'après la classe croissante de leurs premiers membres, la liste des relations primitives des deux systèmes, les groupes illimités ainsi obtenus sont les mêmes de part et d'autre, à cela près que, pour le système (S), un certain nombre de relations ont disparu *en tête de la liste.* Si donc on impose, d'une part aux intégrales de S les conditions initiales choisies, d'autre part à celles de (S) des conditions initiales identiques, en ayant soin seulement de prendre, pour les anciennes dérivées principales devenues paramétriques, les valeurs initiales calculées à l'aide des relations primitives disparues, on pourra, dans le système (S) comme dans le proposé, connaître à l'aide des relations primitives, numériquement concordantes, les valeurs initiales de toutes les dérivées principales, et l'on obtiendra de part et d'autre, pour les développements ainsi construits *a priori* des intégrales hypothétiques, des résultats identiques. Tout revient donc à établir la convergence des développements des intégrales hypothétiques de (S) répondant aux conditions initiales que nous venons d'indiquer.

Or on peut, moyennant un simple changement de fonctions, remplacer le système (S) par un autre où les déterminations initiales des inconnues soient toutes identiquement nulles. Effectivement, soient $u, v, \ldots$ les fonctions inconnues du système (S), et $I_u, I_v, \ldots$ les déterminations initiales de ces inconnues respectives. Nous observerons tout d'abord que, parmi les dérivées de $I_u, I_v, \ldots$, celles qui sont respectivement semblables aux dérivées principales de $u, v, \ldots$ ont toutes zéro pour valeur initiale, et qu'elles sont, par suite, identiquement nulles, puisque leurs propres dérivées, nécessairement semblables à des dérivées principales de $u, v, \ldots$, ont toutes aussi pour valeur initiale zéro; quant aux valeurs initiales de $I_u, I_v, \ldots$ et de leurs dérivées restantes, elles sont précisément égales aux valeurs initiales de $u, v, \ldots$ et de leurs dérivées (paramétriques) semblables. Cela posé, effectuons dans le système (S) la transformation

$$\begin{cases} u = I_u + \mathfrak{u}, \\ v = I_v + \mathfrak{v}, \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

où $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$ désignent de nouvelles fonctions inconnues, et soit $(\mathfrak{S})$ le système ainsi obtenu: il va sans dire que, dans cette transformation, nous

conservons aux variables indépendantes leurs cotes respectives, et que nous attribuons aux nouvelles fonctions inconnues les mêmes cotes respectives qu'aux anciennes correspondantes. Si aux relations du nouveau système ($\mathfrak{S}$) on adjoint maintenant toutes celles qui s'en déduisent par de simples différentiations, il résulte de la remarque faite ci-dessus que le groupe illimité ainsi formé peut se déduire des relations primitives de (S) en remplaçant les dérivées principales de $u, v, \ldots$ par les dérivées semblables de $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$, puis les fonctions $u, v, \ldots$ et leurs dérivées paramétriques par $I_u + \mathfrak{u}$, $I_v + \mathfrak{v}, \ldots$ et les dérivées semblables de ces sommes. De là on conclut immédiatement: 1° que chaque équation du système ($\mathfrak{S}$) est normale;[1] 2° que, sauf le changement de $u, v, \ldots$ en $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$, les deux systèmes ($S$) et ($\mathfrak{S}$) ont mêmes premiers membres, et par suite que les dérivées des fonctions inconnues s'y répartissent de la même manière en principales et paramétriques; 3° que si, sans changer les valeurs initiales des variables indépendantes, on impose, d'une part aux intégrales hypothétiques de (S) les déterminations initiales déjà indiquées, d'autre part à celles de ($\mathfrak{S}$) des déterminations initiales identiquement nulles, les relations primitives, numériquement concordantes dans le premier cas, le seront aussi dans le second, et fourniront, pour les dérivées principales semblables des inconnues correspondantes, les mêmes valeurs initiales. En conséquence, *tout revient à prouver la convergence des développements des intégrales hypothétiques qui, dans le système* ($\mathfrak{S}$), *répondent à des déterminations initiales identiquement nulles.*

Comme on a attribué aux nouvelles fonctions inconnues $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$ les mêmes cotes respectives qu'aux anciennes $u, v, \ldots$, il est clair que les inconnues engagées dans le système ($\mathfrak{S}$) et les dérivées de ces inconnues se partageront encore en trois catégories. Pour faciliter le langage, et faute d'une dénomination meilleure, nous nommerons *dominantes* les dérivées de $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$ qui sont

ou de première catégorie et d'ordre K',

---

[1] Dans la démonstration du n° 31 (*infrà*), on substituera à ce membre de phrase le suivant:

» 1° que, pour chaque équation du système ($\mathfrak{S}$), toute inconnue ou dérivée figurant effectivement dans le second membre a une cote première au plus égale à celle du premier membre. »

ou de deuxième catégorie et d'ordre K'',
ou de troisième catégorie et d'ordre K''',

et *secondaires* toutes celles qui sont

ou de première catégorie et d'ordre $< K'$,
ou de deuxième catégorie et d'ordre $< K''$,
ou de troisième catégorie et d'ordre $< K'''$.

On voit par là que *l'ensemble des dérivées secondaires équivaut exactement à celui des dérivées dont la cote première tombe au dessous de Γ.* On observera en outre que *le système* ($\mathfrak{S}$) *ne contient, outre les variables et les inconnues, que des dérivées dominantes et secondaires,* et que *chacune de ses équations, linéaire par rapport à l'ensemble des dérivées dominantes, a pour premier membre une de celles-ci.*

Nous nommerons, dans ce qui suit:

coefficients du système ($\mathfrak{S}$) les diverses fonctions (des variables, inconnues et dérivées secondaires) qui figurent dans les seconds membres, soit comme multiplicateurs des dérivées dominantes, soit comme termes indépendants de ces dérivées;

$x_0, y_0, \ldots$ les valeurs initiales de $x, y, \ldots$;

$\mathfrak{f}, \ldots$ les diverses quantités du groupe formé par les inconnues $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$ et leurs dérivées secondaires (toutes ces quantités ont des valeurs initiales nulles, puisque les déterminations initiales sont identiquement nulles);

$\mathfrak{u}', \mathfrak{v}', \ldots$ les inconnues de première catégorie, g' leur nombre, $g'_1, g'_2, \ldots, g'_{K'-1}$ les nombres respectifs de leurs dérivées des ordres $1, 2, \ldots, K'-1$;

$\mathfrak{u}'', \mathfrak{v}'' \ldots$ les inconnues de deuxième catégorie, g'' leur nombre, $g''_1, g''_2, \ldots, g''_{K''-1}$ les nombres respectifs de leurs dérivées des ordres $1, 2, \ldots, K''-1$;

$\mathfrak{u}''', \mathfrak{v}''', \ldots$ les inconnues de troisième catégorie, g''' leur nombre, $g'''_1, g'''_2, \ldots, g'''_{K'''-1}$ les nombres respectifs de leurs dérivées des ordres $1, 2, \ldots, K'''-1$.[1]

---

[1] Dans la démonstration du n° 31 (*infrà*), on nommera en outre *termes anormaux* du système ($\mathfrak{S}$) tous ceux qui, dans quelque second membre de ($\mathfrak{S}$), contiennent une dérivée anormale par rapport au premier membre correspondant; et *termes normaux* du système ($\mathfrak{S}$) tous les autres termes des seconds membres.

D'ailleurs, les seconds membres du système primitif S étant, par la définition même des intégrales ordinaires, développables dans un domaine des valeurs initiales choisies pour les diverses quantités qui y figurent, on voit sans peine que les coefficients du système ($\mathfrak{S}$), fonctions des diverses quantités

$$x\,,\,y\,,\,\ldots\,,\,\mathfrak{f}\,,\,\ldots\,,$$

sont développables dans un domaine des valeurs initiales

$$x_0\,,\,y_0\,,\,\ldots\,,\,0\,,\,\ldots\,.$$

VII. Soient

ε une constante positive moindre que $\frac{1}{3}$ (c'est-à-dire moindre que le quotient de 1 par le nombre des catégories d'inconnues du système donné);

μ une constante positive quelconque;

$$\begin{cases} K', K'', K''', \\ g'\ , g'_1\ , g'_2\ , \ldots, g'_{K'-1}, \\ g''\ , g''_1\ , g''_2\ , \ldots, g''_{K''-1}, \\ g''', g'''_1, g'''_2, \ldots, g'''_{K'''-1}, \end{cases}$$

les entiers définis dans ce qui précède (V), (VI);

w', w'', w''' trois fonctions inconnues de la variable indépendante t.

Si l'on pose

$$(50)\qquad \begin{cases} z = t + g'w' + g'_1\dfrac{\partial w'}{\partial t} + \ldots + g'_{K'-1}\dfrac{\partial^{K'-1} w'}{\partial t^{K'-1}} \\[2ex] \qquad + g''w'' + g''_1\dfrac{\partial w''}{\partial t} + \ldots + g''_{K''-1}\dfrac{\partial^{K''-1} w''}{\partial t^{K''-1}} \\[2ex] \qquad + g'''w''' + g'''_1\dfrac{\partial w'''}{\partial t} + \ldots + g'''_{K'''-1}\dfrac{\partial^{K'''-1} w'''}{\partial t^{K'''-1}}, \end{cases}$$

et $\theta(z) = \frac{1}{1-z}$, *le système différentiel*

$$(51)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^{K'} w'}{\partial t^{K'}} &= \frac{\mu\theta(z)}{1-3\varepsilon\theta(z)}, \\ \frac{\partial^{K''} w''}{\partial t^{K''}} &= \frac{\mu\theta(z)}{1-3\varepsilon\theta(z)}, \\ \frac{\partial^{K'''} w'''}{\partial t^{K'''}} &= \frac{\mu\theta(z)}{1-3\varepsilon\theta(z)} \end{aligned} \right.$$

admet un groupe d'intégrales satisfaisant aux conditions initiales

$$(52)\qquad \left\{ \begin{aligned} w' &= \frac{\partial w'}{\partial t} = \dots = \frac{\partial^{K'-1} w'}{\partial t^{K'-1}} = 0 \\ w'' &= \frac{\partial w''}{\partial t} = \dots = \frac{\partial^{K''-1} w''}{\partial t^{K''-1}} = 0 \\ w''' &= \frac{\partial w'''}{\partial t} = \dots = \frac{\partial^{K'''-1} w'''}{\partial t^{K'''-1}} = 0 \end{aligned} \right\} \text{ pour } t = 0.$$

Les dérivées restantes de ces intégrales ont d'ailleurs, pour $t = 0$, des valeurs initiales essentiellement positives.

D'abord, l'existence d'un groupe d'intégrales répondant aux conditions initiales (52) résulte immédiatement de l'alinéa IV du présent numéro 22.

D'un autre côté, si l'on développe $\theta(z)$ par la formule

$$1 + z + z^2 + \dots,$$

et que, après avoir remplacé z par le second membre de (50), on ordonne le résultat par rapport aux puissances de

$$\begin{gathered} t\,, \\ w',\ \frac{\partial w'}{\partial t},\ \dots,\ \frac{\partial^{K'-1} w'}{\partial t^{K'-1}}, \\ w'',\ \frac{\partial w''}{\partial t},\ \dots,\ \frac{\partial^{K''-1} w''}{\partial t^{K''-1}}, \\ w''',\ \frac{\partial w'''}{\partial t},\ \dots,\ \frac{\partial^{K'''-1} w'''}{\partial t^{K'''-1}}, \end{gathered}$$

on voit immédiatement que les valeurs initiales de la fonction ainsi ob-

tenue et de ses dérivées partielles de tous ordres sont essentiellement positives. Il en est de même de la fonction $\frac{1}{1-3\varepsilon\theta(z)}$, qu'on peut, à cause de $\varepsilon < \frac{1}{3}$, développer suivant la formule

$$1 + 3\varepsilon\theta + 3^2\varepsilon^2\theta^2 + \dots,$$

par suite enfin du produit

$$\mu\theta(z) \cdot \frac{1}{1-3\varepsilon\theta(z)},$$

second membre commun aux équations du système (51). Les valeurs initiales des dérivées principales de nos intégrales jouissent donc, elles aussi, de la propriété annoncée: car l'attribution aux quantités

$$t, w', w'', w'''$$

des cotes respectives

$$1, -K', -K'', -K'''$$

met tout d'abord en évidence la nature orthonome du système (51), et, cela étant, on aperçoit sans peine que le calcul des valeurs initiales des dérivées principales, effectué de proche en proche pour les classes successives à l'aide des relations primitives, conduit nécessairement à des résultats tous positifs.

Nous désignerons par $W'(t)$, $W''(t)$, $W'''(t)$ les intégrales considérées du système (51).

Nous ferons en outre observer ce qui suit.

Si l'on nomme $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \dots, \varepsilon_1'', \varepsilon_2'', \dots, \varepsilon_1''', \varepsilon_2''', \dots,$ des quantités positives (en nombre limité) vérifiant les relations

$$\varepsilon_1' + \varepsilon_2' + \dots = \varepsilon,$$

$$\varepsilon_1'' + \varepsilon_2'' + \dots = \varepsilon,$$

$$\varepsilon_1''' + \varepsilon_2''' + \dots = \varepsilon,$$

le système (51) entraîne évidemment comme conséquence

$$(53)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial^{K'}w'}{\partial t^{K'}}=\mu\theta(z)+\varepsilon_1'\;\theta(z)\;\dfrac{\partial^{K'}w'}{\partial t^{K'}}+\varepsilon_2'\;\theta(z)\;\dfrac{\partial^{K'}w'}{\partial t^{K'}}+\dots\\ \qquad\qquad+\varepsilon_1''\;\theta(z)\;\dfrac{\partial^{K''}w''}{\partial t^{K''}}+\varepsilon_2''\;\theta(z)\;\dfrac{\partial^{K''}w''}{\partial t^{K''}}+\dots\\ \qquad\qquad+\varepsilon_1'''\theta(z)\dfrac{\partial^{K'''}w'''}{\partial t^{K'''}}+\varepsilon_2'''\theta(z)\dfrac{\partial^{K'''}w'''}{\partial t^{K'''}}+\dots,\\ \dfrac{\partial^{K''}w''}{\partial t^{K''}}=\text{idem},\\ \dfrac{\partial^{K'''}w'''}{\partial t^{K'''}}=\text{idem}.\end{cases}$$

D'ailleurs, le système (51) entraînant aussi comme conséquence les relations

$$\frac{\mu\varepsilon\theta^2(z)}{1-3\varepsilon\theta(z)}=\varepsilon\theta(z)\frac{\partial^{K'}w'}{\partial t^{K'}}=\varepsilon\theta(z)\frac{\partial^{K''}w''}{\partial t^{K''}}=\varepsilon\theta(z)\frac{\partial^{K'''}w'''}{\partial t^{K'''}},$$

si, dans l'une quelconque des équations (53), on remplace telle ou telle des sommes

$$\varepsilon_1'\;\theta(z)\;\frac{\partial^{K'}w'}{\partial t^{K'}}+\varepsilon_2'\;\theta(z)\;\frac{\partial^{K'}w'}{\partial t^{K'}}+\dots,$$

$$\varepsilon_1''\;\theta(z)\;\frac{\partial^{K''}w''}{\partial t^{K''}}+\varepsilon_2''\;\theta(z)\;\frac{\partial^{K''}w''}{\partial t^{K''}}+\dots,$$

$$\varepsilon_1'''\theta(z)\frac{\partial^{K'''}w'''}{\partial t^{K'''}}+\varepsilon_2'''\theta(z)\frac{\partial^{K'''}w'''}{\partial t^{K'''}}+\dots,$$

par la quantité $\dfrac{\mu\varepsilon\theta^2(z)}{1-3\varepsilon\theta(z)}$, on tombe encore sur une conséquence de (51).

VIII. *Le système déduit de* ($\mathfrak{S}$) *en y remplaçant les coefficients des seconds membres par certaines majorantes relatives aux valeurs initiales*

$$x_0,\, y_0,\, \dots,\, 0,\, \dots$$

des quantités

$$x,\, y,\, \dots,\, \mathfrak{f},\, \dots$$

possède un groupe d'intégrales qui s'annulent, ainsi que leur dérivées secondaires, pour

$$x-x_0=y-y_0=\dots=0,$$

tandis que toutes leurs autres dérivées ont des valeurs initiales positives.

Aux variables indépendantes et aux fonctions inconnues

$$x,\, y,\, \dots,\, \mathfrak{u}',\, \mathfrak{v}',\, \dots,\, \mathfrak{u}'',\, \mathfrak{v}'',\, \dots,\, \mathfrak{u}''',\, \mathfrak{v}''',\, \dots$$

du système ($\mathfrak{S}$) faisons correspondre autant de constantes positives

(54) $$\xi, \eta, \ldots, \upsilon', \psi', \ldots, \upsilon'', \psi'', \ldots, \upsilon''', \psi''', \ldots,$$

que nous nommerons, pour abréger, leurs *poids* respectifs; considérant ensuite l'une quelconque des dérivées des inconnues, appelons *poids* de cette dérivée le quotient obtenu en divisant le poids de la fonction à laquelle elle appartient par ceux de toutes les variables de différentiation, distinctes ou non; désignons enfin d'une manière générale par $\varphi, \ldots$ les poids respectifs des quantités $\mathfrak{f}, \ldots$.

Cela posé, considérons une équation, conséquence de (51), subsistant entre

$$z, \frac{\partial^{K'} w'}{\partial t^{K'}}, \frac{\partial^{K''} w''}{\partial t^{K''}}, \frac{\partial^{K'''} w'''}{\partial t^{K'''}},$$

et remplaçons-y la somme z par la somme

$$s = \xi(x - x_0) + \eta(y - y_0) + \cdots + \varphi\mathfrak{f} + \cdots;$$

substituons d'autre part à la dérivée $\frac{\partial^{K'} w'}{\partial t^{K'}}$, qui peut figurer dans divers termes de l'équation considérée, divers produits obtenus chacun en multipliant l'une quelconque des dérivées dominantes de $\mathfrak{u}', \mathfrak{v}', \ldots$ par son poids; effectuons enfin des substitutions analogues pour chacune des dérivées $\frac{\partial^{K''} w''}{\partial t^{K''}}$ et pour chacune des dérivées $\frac{\partial^{K'''} w'''}{\partial t^{K'''}}$: la relation résultante sera, comme il est bien facile de s'en rendre compte, identiquement vérifiée pour

(55) $$\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{u}' &= \frac{1}{\upsilon'} W' \;[\xi(x - x_0) + \eta(y - y_0) + \cdots],\\
\mathfrak{v}' &= \frac{1}{\psi'} W' \;[\xi(x - x_0) + \eta(y - y_0) + \cdots],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mathfrak{u}'' &= \frac{1}{\upsilon''} W'' [\xi(x - x_0) + \eta(y - y_0) + \cdots],\\
\mathfrak{v}'' &= \frac{1}{\psi''} W'' [\xi(x - x_0) + \eta(y - y_0) + \cdots],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mathfrak{u}''' &= \frac{1}{\upsilon'''} W'''[\xi(x - x_0) + \eta(y - y_0) + \cdots],\\
\mathfrak{v}''' &= \frac{1}{\psi'''} W'''[\xi(x - x_0) + \eta(y - y_0) + \cdots],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right.$$

Prenons maintenant, dans le système ($\mathfrak{S}$), une équation quelconque ($\mathfrak{s}$), et désignons par q', q'', q''' les nombres respectifs ($\geqq 0$) des dérivées dominantes de première, seconde, troisième catégorie, qui figurent *effectivement* dans son second membre; par

$$\begin{array}{l} \Delta'_1 \;, \; \Delta'_2 \;, \; \ldots, \; \Delta'_{q'} \;, \\ \Delta''_1 \;, \; \Delta''_2 \;, \; \ldots, \; \Delta''_{q''} \;, \\ \Delta'''_1 \;, \; \Delta'''_2 \;, \; \ldots, \; \Delta'''_{q'''} \end{array}$$

ces dérivées respectives, par

$$\begin{array}{l} \varpi'_1 \;, \; \varpi'_2 \;, \; \ldots, \; \varpi'_{q'} \;, \\ \varpi''_1 \;, \; \varpi''_2 \;, \; \ldots, \; \varpi''_{q''} \;, \\ \varpi'''_1 \;, \; \varpi'''_2 \;, \; \ldots, \; \varpi'''_{q'''} \end{array}$$

leurs poids respectifs, par Δ le premier membre de ($\mathfrak{s}$), et par ϖ le poids de Δ. Si l'entier q' n'est pas nul, on remplacera l'ensemble des termes en $\Delta'_1, \Delta'_2, \ldots, \Delta'_{q'}$ qui figurent dans le second membre de ($\mathfrak{s}$) par

$$\frac{\varepsilon}{q'}\varpi'_1\theta(s)\Delta'_1 + \frac{\varepsilon}{q'}\varpi'_2\theta(s)\Delta'_2 + \ldots + \frac{\varepsilon}{q'}\varpi'_{q'}\theta(s)\Delta'_{q'};$$

si q' est nul, on remplacera cet ensemble absent par $\frac{\mu\varepsilon\theta^2(s)}{1-3\varepsilon\theta(s)}$. On effectuera des substitutions analogues pour les termes en $\Delta''_1, \Delta''_2, \ldots, \Delta''_{q''}$, et pour les termes en $\Delta'''_1, \Delta'''_2, \ldots, \Delta'''_{q'''}$ qui figurent dans le second membre de ($\mathfrak{s}$). Quant au terme indépendant des dérivées dominantes, on le remplacera par $\mu\theta(s)$. On remplacera enfin le premier membre Δ par $\varpi\Delta$, et on multipliera les deux membres par $\frac{1}{\varpi}$. L'équation finalement obtenue (($\mathfrak{s}$)) ne différera alors de ($\mathfrak{s}$) que par les coefficients, fonctions de $x, y, \ldots, \mathfrak{f}, \ldots$, qui figurent dans le second membre. A chaque équation du système ($\mathfrak{S}$) on fera correspondre de même une équation telle que (($\mathfrak{s}$)); on obtiendra finalement un système (($\mathfrak{S}$)) ne différant de ($\mathfrak{S}$) que par les coefficients des seconds membres, et identiquement vérifié par la substitution aux inconnues des seconds membres de (55), c'est à dire de fonctions qui, elles et toutes leurs dérivées secondaires, prennent

en $x_0, y_0, \ldots$ des valeurs initiales nulles, tandis que leurs dérivées restantes y prennent des valeurs initiales positives. Chacun des nouveaux coefficients s'obtient d'ailleurs en faisant le produit de $\theta(s)$ par quelque constante positive, et y ajoutant parfois le produit de $\frac{\theta^2(s)}{1-3\varepsilon\theta(s)}$ par quelque autre constante positive. La première de ces deux constantes, qui seule est importante à considérer, et que nous nommerons, pour abréger, *caractéristique* du coefficient, dépend de ε ou de μ suivant que le coefficient où elle figure multiplie ou non quelque dérivée dominante. Son produit par $\theta(s)$ est identique au coefficient de $((\mathfrak{S}))$ dont il s'agit, ou l'admet pour majorante relativement aux valeurs $x_0, y_0, \ldots, 0, \ldots$ de $x, y, \ldots, \mathfrak{f}, \ldots$.

La constante positive ε étant choisie sous la seule condition d'être inférieure à $\frac{1}{3}$, fixons maintenant les valeurs des constantes positives (54). Considérons à cet effet le domaine des valeurs

$$(56) \qquad x_0, y_0, \ldots, 0, \ldots$$

à l'intérieur duquel les coefficients des seconds membres de $(\mathfrak{S})$ sont développables, et soient

r une quantité positive moindre que tous ses rayons;

M une quantité positive supérieure à toutes celles que l'on obtient, lorsque, après avoir développé les divers coefficients du système $(\mathfrak{S})$ à partir des valeurs (56), on remplace dans ces développements les coefficients par leurs modules, et les quantités

$$x-x_0, y-y_0, \ldots, \mathfrak{f}, \ldots$$

par la constante r;[1]

---

[1] Dans la démonstration du n° 31 (*infrà*), on remplacera cette phrase par la suivante:

»M une quantité positive supérieure à toutes celles que l'on obtient, lorsque, après avoir développé à partir des valeurs (56) les coefficients des termes normaux du système $(\mathfrak{S})$ et les dérivées premières des coefficients des termes anormaux, on remplace dans ces développements les coefficients par leurs modules, et les quantités

$$x-x_0, y-y_0, \ldots, \mathfrak{f}, \ldots$$

par la constante r.»

P la plus grande des deux quantités $M, \frac{1}{r}$;

Q un entier positif supérieur à la plus grande valeur que puisse atteindre, pour une équation quelconque du système ($\mathfrak{S}$), le nombre des dérivées dominantes figurant au second membre;

$h_2, h_3, \ldots, h_p$ les plus petites valeurs que puissent respectivement atteindre les cotes seconde, troisième, ..., $p^{\text{ième}}$ des diverses variables indépendantes;

$G_2, G_3, \ldots, G_p$ les plus grandes valeurs que puissent respectivement atteindre celles des quantités $\mathfrak{f}, \ldots$, c'est à dire des fonctions inconnues et de leurs dérivées secondaires;

$j_2, j_3, \ldots, j_p$ les plus petites valeurs, et $J_2, J_3, \ldots, J_p$ les plus grandes valeurs que puissent respectivement atteindre celles des diverses dérivées dominantes.

Désignant en outre par

$$\alpha\,,\ \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$$

$p+1$ constantes positives dont les valeurs vont être fixées dans un instant, nous prendrons: 1° pour le poids d'une variable indépendante, un produit de puissances de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ d'exposants respectivement égaux aux cotes première, seconde, ..., $p^{\text{ième}}$ de cette variable; 2° pour le poids d'une fonction inconnue, le quotient de α par des puissances de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ d'exposants respectivement égaux aux cotes première, seconde, ..., $p^{\text{ième}}$ de la fonction inconnue considérée. — Le poids d'une dérivée de fonction inconnue aura alors pour valeur le quotient de α par des puissances de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ d'exposants respectivement égaux aux cotes première, seconde, ..., $p^{\text{ième}}$ de la dérivée dont il s'agit.

Cela étant, [1] on déterminera successivement les quantités $\theta_p, \theta_{p-1}, \ldots, \theta_2, \theta_1$ et α de manière à vérifier les inégalités:

---

[1] Dans la démonstration du n° 31 (*infrà*), on remplacera la fin du présent alinéa VIII par ce qui suit:

»Cela étant, on déterminera successivement les quantités $\theta_p, \theta_{p-1}, \ldots, \theta_2, \theta_1$ et α de manière à vérifier les inégalités

$$\begin{cases} \theta_p > 1, \\ \theta_p > \dfrac{PQ}{\varepsilon}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_{p-1} > 1, \\ \theta_{p-1} > \dfrac{PQ}{\varepsilon}\theta_p^{J_p-j_p}; \end{cases}$$

. . . .

$$\begin{cases} \theta_2 > 1, \\ \theta_2 > \dfrac{PQ}{\varepsilon}\theta_3^{J_3-j_3} \dots \theta_p^{J_p-j_p}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_1 > 1, \\ \theta_1 > \dfrac{PQ}{\varepsilon}\theta_2^{J_2-j_2}\theta_3^{J_3-j_3} \dots \theta_p^{J_p-j_p}, \\ \theta_1 > P\theta_2^{-h_2}\theta_3^{-h_3} \dots \theta_p^{-h_p}; \end{cases}$$

$$a > P\theta_1^{l'-1}\theta_2^{G_2}\theta_3^{G_3} \dots \theta_p^{G_p}.$$

$$\begin{cases} \theta_p > 1, \\ \theta_p > \dfrac{PQ}{\varepsilon}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_{p-1} > 1, \\ \theta_{p-1} > \dfrac{PQ}{\varepsilon}\theta_p^{J_p-j_p}; \end{cases}$$

. . . .

$$\begin{cases} \theta_2 > 1, \\ \theta_2 > \dfrac{PQ}{\varepsilon}\theta_3^{J_3-j_3} \dots \theta_p^{J_p-j_p}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_1 > 1, \\ \theta_1 > \dfrac{PQ}{\varepsilon}\theta_2^{J_2-j_2}\theta_3^{J_3-j_3} \dots \theta_p^{J_p-j_p}, \\ \theta_1 > \dfrac{PQ}{\varepsilon}\theta_2^{J_2-j_2-h_2}\theta_3^{J_3-j_3-h_3} \dots \theta_p^{J_p-j_p-h_p}, \\ \theta_1 > P\theta_2^{-h_2}\theta_3^{-h_3} \dots \theta_p^{-h_p}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > P\theta_1^{l'-1}\theta_2^{G_2}\theta_3^{G_3} \dots \theta_p^{G_p}, \\ a > \dfrac{PQ}{\varepsilon}\theta_1^{l'-1}\theta_2^{J_2-j_2+G_2}\theta_3^{J_3-j_3+G_3} \dots \theta_p^{J_p-j_p+G_p}, \end{cases}$$

Dans ces conditions, les quantités $\xi, \eta, \ldots, \varphi, \ldots$ et les caractéristiques dépendant de ε ne peuvent manquer, comme nous allons le voir, d'être toutes supérieures à P.

---

et on raisonnera comme il suit pour établir que les coefficients du système désigné par $((\mathfrak{S}))$ sont majorants pour les coefficients correspondants de $(\mathfrak{S})$.

En premier lieu, les constantes $\xi, \eta, \ldots, \varphi, \ldots$ ne peuvent manquer d'être toutes supérieures à P. Car, les quantités $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ étant toutes plus grandes que 1, et les cotes premières des variables indépendantes au moins égales à 1, les quantités $\xi, \eta, \ldots$ sont toutes au moins égales à

$$\theta_1 \theta_2^{h_2} \theta_3^{h_3} \ldots \theta_p^{h_p},$$

par suite supérieures à P; et, d'un autre côté, puisque les quantités $\mathfrak{f}, \ldots$ ont toutes des cotes premières moindres que Γ, les quantités $\varphi, \ldots$ sont toutes au moins égales à

$$\frac{a}{\theta_1^{\Gamma-1} \theta_2^{G_2} \theta_3^{G_3} \ldots \theta_p^{G_p}},$$

par suite aussi supérieures à P.

Si l'on considère maintenant une équation quelconque du système $((\mathfrak{S}))$, et, dans le second membre de cette équation, une dérivée dominante qui soit normale par rapport au premier membre, la dérivée dont il s'agit a nécessairement: soit une cote première inférieure à celle du premier membre; soit une cote première égale à celle du premier membre, avec une cote seconde inférieure; ...; soit des cotes première, seconde, ..., $(p-2)^{\text{ième}}$ respectivement égales à celles du premier membre avec une cote $(p-1)^{\text{ième}}$ inférieure; soit enfin des cotes première, seconde, ..., $(p-1)^{\text{ième}}$ respectivement égales à celles du premier membre avec une cote $p^{\text{ième}}$ inférieure. Comme les quantites $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ sont toutes supérieures à 1, les caractéristiques dépendant de ε dans les termes normaux des seconds membres de $((\mathfrak{S}))$ ont donc, suivant le cas, une valeur supérieure à l'une ou à l'autre des quantités

$$\frac{\varepsilon}{Q} \theta_p^{j_p - J_p} \ldots \theta_3^{j_3 - J_3} \theta_2^{j_2 - J_2} \theta_1,$$

$$\frac{\varepsilon}{Q} \theta_p^{j_p - J_p} \ldots \theta_3^{j_3 - J_3} \theta_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\varepsilon}{Q} \theta_p^{j_p - J_p} \theta_{p-1},$$

$$\frac{\varepsilon}{Q} \theta_p;$$

elles sont donc toutes supérieures à P.

Passons aux termes anormaux. Le coefficient d'un terme anormal a d'abord, dans $((\mathfrak{S}))$, une valeur initiale positive, au lieu d'une valeur initiale nulle qu'il possède dans $(\mathfrak{S})$. On observera ensuite que la dérivée première, par rapport à l'une quelconque des quantités

Effectivement, les quantités $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ étant toutes supérieures à 1, et les cotes premières des variables indépendantes au moins égales à 1, les quantités $\xi, \eta, \ldots$ sont toutes au moins égales à

$$\theta_1 \theta_2^{h_2} \theta_3^{h_3} \ldots \theta_p^{h_p},$$

par suite supérieures à P; et, d'un autre côté, puisque les quantités $\mathfrak{f}, \ldots$ ont toutes des cotes premières moindres que Γ, les quantités $\varphi, \ldots$ sont toutes au moins égales à

$$\frac{a}{\theta_1^{\Gamma-1} \theta_2^{G_2} \theta_3^{G_3} \ldots \theta_p^{G_p}},$$

par suite aussi supérieures à P.

$x, y, \ldots, \mathfrak{f}, \ldots,$ du coefficient d'un terme anormal, est le produit de $\Theta^2(s)$ par une constante positive, et que cette constante positive est au moins égale à la plus petite des quantités

$$\frac{\varepsilon}{Q} \xi \theta_2^{j_2-J_2} \theta_3^{j_3-J_3} \ldots \theta_p^{j_p-J_p},$$

$$\frac{\varepsilon}{Q} \eta \theta_2^{j_2-J_2} \theta_3^{j_3-J_3} \ldots \theta_p^{j_p-J_p},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\varepsilon}{Q} \varphi \theta_2^{j_2-J_2} \theta_3^{j_3-J_3} \ldots \theta_p^{j_p-J_p},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

par suite au moins égale à la plus petite des deux quantités

$$\frac{\varepsilon}{Q} \theta_1 \theta_2^{j_2+h_2-J_2} \theta_3^{j_3+h_3-J_3} \ldots \theta_p^{j_p+h_p-J_p},$$

$$\frac{\varepsilon}{Q} \frac{a}{\theta_1^{\Gamma-1}} \theta_2^{j_2-J_2-G_2} \theta_3^{j_3-J_3-G_3} \ldots \theta_p^{j_p-J_p-G_p},$$

par suite encore supérieure à P.

Finalement, si, désignant par ω le poids maximum des premiers membres du système ((𝔖)), on prend $\mu > P\omega$, toute caractéristique dépendant de μ, étant au moins égale à $\frac{\mu}{\omega}$, sera, elle aussi, supérieure à P.

En rapprochant tout ce qui précède des alinéas I et II du n° 22, on voit sans peine que les divers coefficients du système (𝔖) admettent comme majorantes, par rapport aux valeurs (56), les coefficients correspondants du système ((𝔖)). Nous avons d'ailleurs déjà remarqué que ce dernier admet un groupe d'intégrales qui, elles et toutes leurs dérivées secondaires, prennent en $x_0, y_0, \ldots$ des valeurs initiales nulles, tandis que leurs dérivées restantes y prennent des valeurs initiales positives. »

Si l'on considère maintenant une équation quelconque du système (($\mathfrak{S}$)), chacune des dérivées dominantes figurant au second membre a nécessairement: soit une cote première inférieure à celle du premier membre; soit une cote première égale à celle du premier membre, avec une cote seconde inférieure; . . . ; soit des cotes première, seconde, . . . , $(p-2)^{\text{ième}}$ respectivement égales à celles du premier membre, avec une cote $(p-1)^{\text{ième}}$ inférieure; soit enfin des cotes première, seconde, . . . , $(p-1)^{\text{ième}}$ respectivement égales à celle du premier membre, avec une cote $p^{\text{ième}}$ inférieure. Comme les quantités $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ sont toutes supérieures à 1, les caractéristiques dépendant de ε ont donc, suivant le cas, une valeur supérieure à l'une ou à l'autre des quantités

$$\frac{\varepsilon}{Q}\theta_p^{j_p-J_p}\ldots\theta_3^{j_3-J_3}\theta_2^{j_2-J_2}\theta_1,$$

$$\frac{\varepsilon}{Q}\theta_p^{j_p-J_p}\ldots\theta_3^{j_3-J_3}\theta_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\varepsilon}{Q}\theta_p^{j_p-J_p}\theta_{p-1},$$

$$\frac{\varepsilon}{Q}\theta_p;$$

elles sont donc toutes supérieures à P.

Finalement, si, désignant par ω le poids maximum des premiers membres du système (($\mathfrak{S}$)), on prend $\mu > P\omega$, toute caractéristique dépendant de μ, étant au moins égale à $\frac{\mu}{\omega}$, sera, par suite, supérieure à P.

En rapprochant des alinéas I et II tout ce qui précède, on voit sans peine que les divers coefficients du système ($\mathfrak{S}$) admettent comme majorantes, par rapport aux valeurs (56), les coefficients correspondants du système (($\mathfrak{S}$)). Nous avons d'ailleurs déjà remarqué que ce dernier admet un groupe d'intégrales qui, elles et toutes leurs dérivées secondaires, prennent en $x_0, y_0, \ldots$ des valeurs initiales nulles, tandis que leurs dérivées restantes y prennent des valeurs initiales positives.

IX. *Les intégrales hypothétiques de* ($\mathfrak{S}$) *qui, pour* $x-x_0=y-y_0=\ldots=0$, *ont des déterminations initiales identiquement nulles, ont leurs développements nécessairement convergents, ce qui achève la démonstration.*

Il suffit, pour l'établir, de prouver que, dans le système ((𝕾)), les dérivées de tous ordres des intégrales effectives dont nous venons de constater l'existence ont des valeurs initiales positives (ou nulles), supérieures (ou égales) aux modules des valeurs initiales que doivent prendre les dérivées semblables des intégrales hypothétiques de (𝕾). Le point en question se trouve déjà établi pour les dérivées paramétriques, car leurs valeurs initiales sont nulles dans le système (𝕾), tandis qu'elles sont positives ou nulles dans le système ((𝕾)): il reste donc à l'établir pour les dérivées principales.

Or, si l'on prend dans les systèmes (𝕾) et ((𝕾)) deux relations primitives correspondantes (𝔭) et ((𝔭)), le second membre de la première est une somme de produits pouvant contenir en facteurs quatre sortes de quantités, savoir: certains entiers positifs; certains coefficients des seconds membres de (𝕾); certaines dérivées partielles de ces coefficients; enfin certaines dérivées, principales ou paramétriques, des fonctions inconnues. Et le second membre de la deuxième est composé exactement de la même façon avec les entiers positifs dont il s'agit, les majorantes des coefficients de (𝕾), leurs dérivées partielles, et les dérivées principales ou paramétriques des fonctions inconnues. D'un autre côté, comme nous l'avons déjà dit, les valeurs initiales des dérivées paramétriques des intégrales effectives de ((𝕾)) sont positives, et supérieures aux modules de celles que possèdent les dérivées semblables des intégrales hypothétiques de (𝕾). Si donc on ordonne par rapport aux dérivées principales les seconds membres de (𝔭) et ((𝔭)), et qu'on y remplace par leurs valeurs initiales les variables, les inconnues, et les dérivées paramétriques, le second des polynomes ainsi obtenus aura ses coefficients positifs et supérieurs aux modules des coefficients correspondants du premier. On voit alors, par un raisonnement effectué de proche en proche pour les classes successives, que les valeurs initiales des dérivées principales des intégrales effectives de ((𝕾)) sont positives, et supérieures aux modules de celles que possèdent les dérivées semblables des intégrales hypothétiques de (𝕾): c'est ce qui restait à établir. [1]

---

[1] Dans la démonstration du n° 31 (*infrà*), on remplacera la dernière phrase de l'alinéa IX par la suivante:

»En observant maintenant que toutes les dérivées principales anormales par rapport

QUATRIÈME PARTIE.

Réduction d'un système différentiel quelconque à une forme complètement intégrable.

23. Nous rappellerons tout d'abord le principe suivant.

Soient $x, y, \ldots$ des variables en nombre quelconque que l'on considère comme étant toutes indépendantes les unes des autres; soient en outre

$$\begin{cases} f(x, y, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi(x, y, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

deux systèmes d'équations numériquement vérifiées pour les valeurs particulières $x_0, y_0, \ldots$, et dont les premiers membres soient des fonctions bien définies de $x, y, \ldots$ dans un domaine suffisamment restreint des valeurs $x_0, y_0, \ldots$. Le champ de variation de $x, y, \ldots$ étant supposé réduit à un pareil domaine, si le second des deux systèmes considérés admet toutes les solutions numériques du premier, on dit qu'il est une *conséquence algébrique* du premier; et si chacun des deux systèmes est une conséquence algébrique de l'autre, on dit qu'il sont *algébriquement équivalents.*

Cela posé, et $x, y, \ldots$ ayant la même signification que ci-dessus, *si l'équation*

$$(57) \qquad F(x, y, \ldots) = 0,$$

numériquement vérifiée pour les valeurs particulières $x_0, y_0, \ldots$, *a son*

---

au premier membre commun de $(\mathfrak{p})$ et $((\mathfrak{p}))$ ont disparu du premier polynome après cette substitution, on voit, par un raisonnement effectué de proche en proche pour les classes successives, que les valeurs initiales des dérivées principales des intégrales effectives de $((\mathfrak{S}))$ sont positives, et supérieures aux modules de celles que possèdent les dérivées semblables des intégrales hypothétiques de $(\mathfrak{S})$: c'est ce qui restait à établir.»

premier membre développable dans un domaine de ces valeurs, si de plus la dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial x}$ *ne s'annule pas pour les valeurs dont il s'agit, l'équation* (57) *équivaut algébriquement, dans le voisinage de* $x_0, y_0, \ldots,$ *à une équation*

$$(58) \qquad x = \Xi(y, \ldots),$$

dont le second membre, développable dans un domaine des valeurs $y_0, \ldots,$ *se réduit, pour ces dernières, à* x_0.

Ecrire la formule (58), c'est ce qu'on appelle résoudre *au point de vue algébrique* l'équation (57) par rapport à x dans le voisinage de $x_0, y_0, \ldots$.

24. *Etant donné un système différentiel S, dont les second membres sont nuls et les premiers développables dans quelque domaine, on peut, dans les circonstances générales, et sauf la rencontre de relations non identiques entre les seules variables indépendantes, en déduire sans changement de variables ni intégration un second système admettant les mêmes intégrales, et composé: 1° d'un groupe orthonome passif où se trouvent engagées certaines des inconnues du système proposé; 2° d'un groupe de relations exprimant les inconnues restantes à l'aide des variables indépendantes, des inconnues du premier groupe, et des dérivées de celles-ci.* [1]

(Il va sans dire que *ces deux groupes de relations peuvent éventuellement se réduire à un seul.*)

Nous présenterons tout d'abord une remarque générale sur le genre de raisonnement que l'on est obligé de faire dans une semblable question, quel que soit d'ailleurs le mode de réduction adopté. On doit en effet, quel que soit ce mode, résoudre algébriquement par rapport aux fonctions inconnues et à leurs dérivées, considérées dans un certain ordre, certaines relations dont les unes sont données, et dont les autres s'introduisent au fur et à mesure des calculs. Or, on suppose essentiellement que chacune des résolutions successives, auxquelles on est ainsi conduit, peut s'effectuer conformément au principe du numéro précédent 23, sans que les résolutions antérieures en soient troublées. Cette présomption,

---

[1] Cette proposition et la démonstration qui suit ont été publiées, en juin 1893, dans les Annales de l'Ecole Normale (p. 151 et suiv.): on trouvera toutefois, dans la rédaction actuelle, quelques légères améliorations.

à laquelle les faits peuvent, dans tel ou tel cas, ne pas donner raison, se justifie toutefois assez fréquemment pour que nos déductions conservent toute leur valeur générale: mais, à vrai dire, la très-grande généralité du problème posé ne nous permettra d'obtenir, dans les raisonnements de l'alinéa III (*infrà*), ni une rigueur absolue, ni une précision irréprochable.

Cela posé, voici comment on peut s'y prendre pour établir la proposition générale formulée ci-dessus.

I. *Si dans un système différentiel, résolu par rapport à certaines dérivées des inconnues, on attribue, conformément aux indications du n°* 6, *p cotes à chacune des variables et des inconnues, et si chaque second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités normales par rapport au premier membre correspondant, on peut, sans changer les cotes, en déduire un système orthoïque équivalent, composé d'un nombre égal d'équations ayant respectivement les mêmes premiers membres.*

Si le système donné $\mathfrak{H}$ n'est pas orthoïque, on désignera par C la cote première maxima de ses premiers membres; puis, de l'ensemble des relations déduites de $\mathfrak{H}$ par différentiations, on extraira un groupe $\mathfrak{H}'$ choisi de telle sorte, que, dans le système simultané

$$(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}'), \tag{59}$$

chacune des dérivées principales (12) dont la cote première ne surpasse pas C figure comme premier membre une fois et une seule. Les équations du système (59), rangées à la suite les unes des autres d'après la classe croissante de leurs premiers membres (8), sont successivement résolubles par rapport aux dérivées qui figurent dans ces premiers membres, et, en effectuant la résolution dont il s'agit, nous sommes conduit à un système

$$(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}'), \tag{60}$$

composé de deux groupes d'équations dont les premiers membres sont respectivement identiques à ceux des groupes $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{H}'$, tandis que les seconds membres, indépendants de toute quantité anormale, le sont en outre de toute dérivée principale. De là résulte immédiatement la nature orthoïque du système $\mathfrak{K}$, et nous allons prouver maintenant qu'au point de vue de l'intégration ce système équivaut à $\mathfrak{H}$.

1° *Toute solution de* $\mathfrak{J}$ *vérifie* $\mathfrak{K}$.

Car elle vérifie (59), et par conséquent aussi (60).

2° *Toute solution de* $\mathfrak{K}$ *vérifie* $\mathfrak{J}$.

Effectivement, les équations du système (59) étant disposées les unes à la suite des autres dans leur ordre de résolution successive, et celles du système (60) dans l'ordre correspondant, désignons par $\mathfrak{j}_i$ et $\mathfrak{k}_i$ les équations de rang i de ces deux systèmes respectifs. Si l'on observe que la relation $\mathfrak{j}_1$ fait nécessairement partie du groupe $\mathfrak{J}$, que dès lors $\mathfrak{k}_1$ fait partie du groupe $\mathfrak{K}$, et que, les relations $\mathfrak{j}_1$ et $\mathfrak{k}_1$ étant identiques entre elles, toute solution de $\mathfrak{K}$ vérifie $\mathfrak{j}_1$ et $\mathfrak{k}_1$, il nous suffit évidemment de faire voir qu'en supposant vérifiées les diverses équations du système $\mathfrak{K}$ et celles des deux suites

$$\mathfrak{j}_1, \mathfrak{j}_2, \ldots, \mathfrak{j}_q,$$

$$\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \ldots, \mathfrak{k}_q,$$

les équations $\mathfrak{j}_{q+1}$, $\mathfrak{k}_{q+1}$ le sont également. Or, si $\mathfrak{k}_{q+1}$ fait partie du groupe $\mathfrak{K}$, elle est vérifiée par hypothèse, donc aussi $\mathfrak{j}_{q+1}$, qui peut être considérée comme une combinaison de $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \ldots, \mathfrak{k}_q, \mathfrak{k}_{q+1}$. Si $\mathfrak{k}_{q+1}$ fait partie du groupe $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{j}_{q+1}$ fait partie du groupe $\mathfrak{J}'$, et peut se déduire par différentiation de quelqu'une des équations $\mathfrak{j}_1, \mathfrak{j}_2, \ldots, \mathfrak{j}_q$; elle est donc vérifiée en même temps que ces dernières, par suite aussi $\mathfrak{k}_{q+1}$, qui s'obtient par une combinaison de $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \ldots, \mathfrak{k}_q, \mathfrak{j}_{q+1}$.

II. *Si l'on considère diverses fonctions*

$$u, v, \ldots, w \tag{61}$$

des variables indépendantes

$$x, y, \ldots, z,$$

et que l'on forme successivement, avec des dérivées de $u, v, \ldots, w$, *divers ensembles (limités) dont chacun ne contienne que des dérivées paramétriques relativement à tous les précédents, le nombre de ces ensembles est forcément limité.* [1]

[1] Cette proposition, dont j'ai publié la démonstration en juin 1893 (Annales de l'Ecole Normale, 1893, p. 171, 172 et 173), contient comme cas particulier la sui-

Plaçons-nous, en effet, dans l'hypothèse contraire, et supposons qu'on puisse former une suite *indéfinie* d'ensembles, dont chacun ne contienne que des dérivées paramétriques relativement à tous les précédents. En pareil cas, quelqu'une des fonctions (61), u par exemple, fournit certainement des dérivées à un nombre illimité d'ensembles. Si l'on désigne par E' l'un de ces derniers ensembles, et par

$$(62)\qquad \frac{\partial^{\lambda'+\mu'+\dots+\nu'} u}{\partial x^{\lambda'} \partial y^{\mu'} \dots \partial z^{\nu'}}$$

l'une des dérivées de u qui figurent dans E', il y a encore, à la suite de E', un nombre illimité d'ensembles contenant des dérivées de la fonction u; pour chacune de ces dérivées, l'un au moins des ordres partiels $\lambda, \mu, \dots, \nu$, relatifs à $x, y, \dots, z$, est inférieur à l'ordre partiel correspondant de (62), et chacune d'elles appartient, à plus forte raison, à quelqu'une des

$$(\lambda' + 1) + (\mu' + 1) + \dots + (\nu' + 1)$$

catégories que définissent respectivement les relations

$$\lambda = 0\,;\ \lambda = 1\,;\ \lambda = 2\,;\ \dots;\ \lambda = \lambda';$$
$$\mu = 0\,;\ \mu = 1\,;\ \mu = 2\,;\ \dots;\ \mu = \mu';$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\nu = 0\,;\ \nu = 1\,;\ \nu = 2\,;\ \dots;\ \nu = \nu'.$$

Des diverses catégories ci-dessus définies, une au moins, par exemple

$$(63)\qquad \lambda = l,$$

fournit donc nécessairement des dérivées de u à un nombre illimité d'en-

---

vante, formulée par M. DELASSUS en 1896: *Si l'on considère une suite infinie d'ensembles canoniques d'ordres croissants*

$$E^n,\ E^{n+1},\ \dots,\ E^{\mu},\ \dots$$

tels que l'on ait, quel que soit μ,

$$(E^{\mu})' \leqq E^{\mu+1},$$

le nombre des termes de la suite pour lesquels il y a inégalité est forcément limité (Annales de l'Ecole Normale, 1896, p. 431 et 432).

sembles postérieurs à E'. Si l'on désigne par E'' l'un de ces derniers ensembles, et par

$$\frac{\partial^{l+\mu''+\ldots+\nu''} u}{\partial x^l \partial y^{\mu''} \ldots \partial z^{\nu''}} \tag{64}$$

l'une des dérivées de u de la catégorie (63) qui figurent dans E'', il y a encore, à la suite de E'', un nombre illimité d'ensembles contenant des dérivées de u de cette même catégorie; pour chacune des dérivées en question, l'un au moins des ordres partiels $\mu, \ldots, \nu$ relatifs à $y, \ldots, z$ est inférieur à l'ordre partiel correspondant de (64), et chacune d'elles appartient, à plus forte raison, à quelqu'une des

$$(\mu'' + 1) + \ldots + (\nu'' + 1)$$

catégories que définissent respectivement les couples de relations

$$\begin{array}{lllll} \left|\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \mu = 0;\end{array}\right. & \left|\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \mu = 1;\end{array}\right. & \left|\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \mu = 2;\end{array}\right. & \ldots; & \left|\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \mu = \mu'';\end{array}\right. \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \left|\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \nu = 0;\end{array}\right. & \left|\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \nu = 1;\end{array}\right. & \left|\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \nu = 2;\end{array}\right. & \ldots; & \left|\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \nu = \nu''.\end{array}\right. \end{array}$$

De ces nouvelles catégories, une au moins, par exemple

$$\left|\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \mu = m,\end{array}\right.$$

fournit donc nécessairement des dérivées de u à un nombre illimité d'ensembles postérieurs à E''. En poursuivant ce raisonnement et désignant par $\ldots, n$ des entiers convenablement choisis, on arrivera à cette conclusion absurde que la catégorie

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \mu = m,\\ \ldots\ldots\\ \nu = n,\end{array}\right.$$

ne comprenant évidemment qu'une seule dérivée de u, en fournit à un nombre illimité d'ensembles.

III. Pour démontrer la proposition dont l'énoncé figure en tête du présent numéro 24, nous adopterons pour les variables, et aussi pour les inconnues engagées dans le système S, un ordre déterminé, et nous attribuerons des cotes à toutes ces quantités, conformément aux indications données dans l'exemple II du n° 21. Considérant alors la suite taxique, nous chercherons quel est, dans cette suite, le terme le plus éloigné (vers la gauche) qui figure effectivement dans les équations du système, nous résoudrons par rapport au terme dont il s'agit l'une des équations où il figure, et nous en porterons la valeur dans les équations restantes: nous aurons ainsi, outre la formule de résolution, un nouveau système S' contenant une équation de moins que le proposé, et dans lequel ne figure plus la dérivée éliminée ni aucune des dérivées situées à sa gauche dans la suite taxique. Nous considérerons, parmi les dérivées restantes, la plus éloignée (vers la gauche) de celles qui figurent effectivement dans S', nous résoudrons par rapport à elle l'une des équations de S' où elle figure, et nous en porterons la valeur dans les équations restantes, ce qui nous donnera, outre les deux formules successives de résolution, un troisième système contenant deux équations de moins que le proposé. Et ainsi de suite. En d'autres termes, nous déduirons des équations données, par résolutions successives, des formules dont les premiers membres se trouvent rangés suivant l'ordre taxique, et, en poursuivant ce calcul jusqu'à ce que les équations non encore résolues ne contiennent plus aucune dérivée, nous tomberons sur un système composé de deux groupes, l'un différentiel, l'autre fini. Si le groupe fini, résolu par rapport aux fonctions inconnues successives, ne nous conduit pas à une relation non identique entre les seules variables indépendantes, auquel cas le système proposé serait impossible, il nous permettra d'exprimer certaines des fonctions inconnues à l'aide des autres et des variables indépendantes, et par suite aussi les dérivées des premières en fonctions composées différentielles des secondes. Le groupe différentiel pourra alors être transformé en un système d'ordre au plus égal à S, et qui sera de même nature que S, avec cette différence que le nombre des fonctions inconnues s'y trouvera diminué, ainsi que le nombre des équations. Sur ce système on opérera comme sur le proposé, et ainsi de suite. Finalement, et sauf la rencontre

d'une relation non identique entre les seules variables indépendantes, le système proposé se trouvera remplacé par un groupe différentiel exclusivement composé de relations normales, et par quelques groupes finis. Si, dans chacun de ces derniers, on tient compte de ceux qui ont été obtenus après lui, on voit que leur ensemble exprime quelques-unes des fonctions inconnues à l'aide des variables indépendantes et des fonctions inconnues restantes. Celles-ci sont seules impliquées dans le groupe différentiel, que l'on peut, en vertu de l'alinéa I, remplacer par un système taxique $\mathfrak{T}$, composé d'un nombre égal d'équations ayant respectivement les mêmes premiers membres.

Si le système $\mathfrak{T}$ n'est point passif, on considérera, parmi les conditions de passivité, celles qui ne se réduisent pas à des identités, et l'on observera qu'elles constituent autant de relations auxquelles les intégrales du proposé doivent nécessairement satisfaire. De ces relations on déduira alors, par résolutions successives, des formules dont les premiers membres se trouvent rangés suivant l'ordre taxique; si, une fois ces formules obtenues, les conditions de passivité ne fournissent en outre aucune relation finie, on adjoindra au système $\mathfrak{T}$ les formules dont il vient d'être question, et l'on substituera au système total ainsi formé, où les équations sont toutes normales, un système taxique $\mathfrak{T}'$, composé d'un nombre égal d'équations ayant respectivement les mêmes premiers membres (I). Si le système $\mathfrak{T}'$ n'est pas passif, on le traitera comme le système $\mathfrak{T}$, et, sauf la rencontre d'un système passif, on continuera ainsi tant que les systèmes $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$, ... successivement obtenus ne fourniront, par la résolution de leurs conditions de passivité, aucune relation finie. Si, à un moment donné, on tombe sur un système non passif où cette circonstance cesse d'être réalisée, on considérera le groupe différentiel et le groupe fini déduits des conditions de passivité; du groupe fini, supposé possible, on tirera un certain nombre des fonctions inconnues exprimées à l'aide des variables indépendantes et des autres fonctions inconnues, et le système dont il s'agit, préalablement augmenté du groupe différentiel, pourra, grâce aux formules résultantes, être transformé en un système de même nature que S, mais impliquant moins de fonctions inconnues encore que n'en impliquait le système $\mathfrak{T}$.

Sur le système résultant, on recommencera à nouveau toutes les opérations successives précédemment exécutées sur S, et ainsi de suite.

Or il est facile de voir que l'application d'un pareil mécanisme conduit forcément soit à une impossibilité, soit à un système passif, soit à l'élimination complète des dérivées. Effectivement, dans l'hypothèse contraire, elle ne pourrait manquer de conduire à un système taxique non passif qui, traité comme l'a été tout-à-l'heure le système $\mathfrak{T}$, engendrerait, sans réduction ultérieure du nombre des fonctions inconnues, une suite *illimitée* de systèmes également taxiques et non passifs. En comparant entre eux deux systèmes consécutifs de cette dernière suite, on trouverait dans le second deux groupes: l'un composé d'équations en nombre égal à celles du premier système et ayant respectivement les mêmes premiers membres; l'autre résolu par rapport à des dérivées paramétriques du premier. En vertu de l'alinéa II, toutes les dérivées des fonctions inconnues finiraient donc par devenir principales, et les conditions de passivité ne fourniraient plus alors que des relations finies; on serait donc conduit, contrairement à ce qui précède, soit à une impossibilité, soit à une réduction du nombre des fonctions inconnues.

25. Ainsi donc, *étant donné un système différentiel dont les seconds membres sont nuls et les premiers développables dans quelque domaine:*

Ou bien ce système n'admet aucune solution;

Ou bien il équivaut à quelque système fini que l'on en peut déduire, sans changement de variables, par de simples résolutions d'équations, combinées avec des différentiations;

Ou bien enfin son intégration se ramène de la même manière à celle de quelque système orthonome passif.

26. La réduction des systèmes différentiels quelconques aux systèmes orthonomes passifs peut encore s'opérer à l'aide d'une méthode un peu différente, fondée sur le théorème suivant:

Etant donné un système différentiel S dont les seconds membres sont nuls et les premiers développables dans quelque domaine, on peut, dans les circonstances générales, et sauf la rencontre d'une relation non identique entre les seules variables $x, y, \ldots$, en déduire sans changement de variables ni intégration un second système admettant les mêmes intégrales, et formé de deux groupes d'équations S_1, S_2 qui jouissent de la double propriété ci-après énoncée: 1° l'une des fonctions inconnues, u, du système proposé ne se trouve plus impliquée dans le groupe S_2; 2° en substituant aux inconnues restantes,

$v, \ldots,$ des intégrales quelconques du groupe S_2, on transforme le groupe S_1, soit en une formule unique exprimant directement la fonction u à l'aide des variables $x, y, \ldots,$ soit en un système orthonome passif à la seule fonction inconnue u.[1]

Nous ne traiterons provisoirement comme inconnue qu'une seule des fonctions $u, v, \ldots,$ la fonction u par exemple, nous adopterons pour les variables indépendantes un ordre déterminé, et nous attribuerons des cotes à $u, x, y, \ldots,$ conformément aux indications données dans l'exemple II du nº 21. Formant alors, avec les dérivées de u, la suite taxique, à laquelle nous adjoindrons, sur sa droite, la fonction u elle-même, nous chercherons quel est, dans cette suite, le terme le plus éloigné (vers la gauche) qui figure effectivement dans les équations du système, nous résoudrons par rapport au terme dont il s'agit l'une des équations où il figure, et nous en porterons la valeur dans les équations restantes: nous aurons ainsi, outre la formule de résolution, un nouveau système S', contenant une équation de moins que le proposé, et dans lequel ne figure plus la dérivée éliminée, ni aucune des dérivées situées à sa gauche. Parmi les dérivées restantes, nous considérerons la plus éloignée (vers la gauche) de celles qui figurent effectivement dans S', nous résoudrons par rapport à elle l'une des équations de S' où elle figure, et nous en porterons la valeur dans les équations restantes, ce qui nous donnera, outre les deux formules successives de résolution, un troisième système contenant deux équations de moins que le proposé. Et ainsi de suite. En poursuivant ce calcul jusqu'à ce que les équations non encore résolues ne contiennent plus la fonction u ni aucune de ses dérivées, nous tomberons sur un système composé de deux groupes, savoir: 1° les formules de résolution $\mathfrak{A}$ successivement obtenues; 2° les équations non encore résolues $\mathfrak{B}$. Si parmi ces dernières figure quelque relation non identique entre les seules variables $x, y, \ldots,$ le système proposé est impossible. Si parmi les premières figure une relation $\mathfrak{a}$ résolue par rapport à u, elle ne contient dans son second membre ni u ni aucune de ses dérivées, et la fonction u se trouve ainsi exprimée à l'aide des variables indépendantes $x, y, \ldots,$ des fonctions restantes $v, \ldots$ et de leurs dérivées; les diverses dérivées de u peuvent donc, elles aussi, s'exprimer de la même manière, et en portant

[1] Voir les Annales de l'Ecole Normale, juin 1893, p. 178, 179 et 180.

leurs valeurs, avec celle de u, dans les formules de résolution précédentes, nous obtiendrons certaines relations $\mathfrak{G}$ ne contenant plus la fonction u ni aucune de ses dérivées: le groupe S_1 se composera alors de la relation unique $\mathfrak{a}$, et le groupe S_2 des relations $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{G}$.

Si aucun de ces cas ne se présente, on pourra, en vertu d'une proposition démontrée plus haut (24, I), remplacer le système $\mathfrak{A}$ par un système taxique $\mathfrak{T}$, composé d'un nombre égal d'équations ayant respectivement les mêmes premiers membres. On observera alors que les conditions de passivité du système $\mathfrak{T}$ constituent autant de relations auxquelles les intégrales du proposé doivent nécessairement satisfaire. On traitera ces relations comme on a traité le système proposé S, et l'on en déduira de même: 1° un premier groupe $\mathfrak{A}'$ d'équations, obtenues par résolutions successives, ayant pour premiers membres certaines dérivées de u et éventuellement cette fonction même; 2° un deuxième groupe $\mathfrak{B}'$ de relations ne contenant plus la fonction u ni aucune de ses dérivées. Si parmi les dernières $\mathfrak{B}'$ figure quelque relation non identique entre les seules variables $x, y, \ldots$, le système proposé est impossible. Si dans le groupe $\mathfrak{A}'$ figure une relation $\mathfrak{a}'$ résolue par rapport à u, la fonction u et ses dérivées peuvent s'exprimer à l'aide des variables indépendantes $x, y, \ldots$, des fonctions restantes $v, \ldots$ et de leurs dérivées, et en portant les valeurs ainsi obtenues dans les relations précédentes du groupe $\mathfrak{A}'$ et dans celles du groupe $\mathfrak{T}$, on obtiendra certaines relations $\mathfrak{G}'$ ne contenant plus la fonction inconnue u ni aucune de ses dérivées: le groupe S_1 se composera alors de la relation unique $\mathfrak{a}'$, et le groupe S_2 des relations $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{G}'$. Si le groupe $\mathfrak{A}'$ n'existe pas, le groupe S_1 se compose des relations $\mathfrak{T}$, et le groupe S_2 des relations $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$.

Si aucun de ces cas ne se présente, on pourra déduire du système $(\mathfrak{T}, \mathfrak{A}')$ un système taxique $\mathfrak{T}'$, composé d'un nombre égal d'équations ayant respectivement les mêmes premiers membres. Sur le système $\mathfrak{T}'$ on opérera comme sur $\mathfrak{T}$, et ainsi de suite.

Or, un pareil mécanisme ne peut manquer de conduire finalement soit à une impossibilité, soit à une équation résolue par rapport à u, soit à des conditions de passivité indépendantes de u et de ses dérivées. Car, dans le cas contraire, il conduirait à une suite illimitée de systèmes taxiques possédant la propriété suivante: chacun des systèmes dont il s'agit comprendrait un premier groupe d'équations en nombre égal à

celles du système précédent et ayant respectivement les mêmes premiers membres, puis un deuxième groupe d'équations résolues par rapport à des dérivées paramétriques du précédent. Il résulte de cette circonstance que toutes les dérivées de u finiraient par devenir principales (24, II), et à partir de ce moment les conditions de passivité demeureraient finies par rapport à u, ce qui est évidemment incompatible avec notre hypothèse.

27. Au système S_2 on pourra appliquer la proposition du numéro précédent, et continuer ainsi jusqu'à épuisement des fonctions inconnues. Dès lors:

Etant donné un système différentiel dont les seconds membres sont nuls et les premiers développables dans quelque domaine, on peut, dans les circonstances générales, et sauf la rencontre de relations non identiques entre les seules variables indépendantes, en déduire, sans changement de variables ni intégration, un second système admettant les mêmes intégrales, et formé de groupes successifs d'équations

$$G_1, G_2, \ldots, G_r,$$

qui jouissent des propriétés suivantes:

1° Ces groupes sont en nombre égal à celui des inconnues

$$u_1, u_2, \ldots, u_r.$$

2° Dans le groupe G_k ($k = 1, 2, \ldots, r$) se trouvent engagées les seules inconnues

$$u_k, u_{k+1}, \ldots, u_r.$$

3° Si le groupe G_k n'est pas entièrement dépourvu d'équations, la substitution à

$$u_{k+1}, \ldots, u_r$$

d'intégrales quelconques du système

$$G_{k+1}, \ldots, G_r$$

transforme G_k, soit en une formule exprimant l'inconnue u_k à l'aide des variables indépendantes, soit en un système orthonome passif à la seule inconnue u_k.

L'intégration du système proposé se ramène ainsi à l'intégration successive de divers systèmes orthonomes passifs n'impliquant chacun

qu'une seule fonction inconnue, et la seule connaissance des premiers membres de

$$G_1\,,\ G_2\,,\ \ldots\,,\ G_r$$

permet de fixer avec une entière précision l'économie des conditions initiales dont la donnée détermine entièrement un groupe d'intégrales du système proposé.

27 bis. Plus généralement:

Etant donné un système différentiel S, dont les seconds membres sont nuls et les premiers développables dans quelque domaine, on peut, dans les circonstances générales, et sauf la rencontre de relations non identiques entre les seules variables indépendantes, en déduire, sans changement de variables ni intégration, un second système admettant les mêmes intégrales, et formé des groupes successifs d'équations

$$S_1\,,\ S_2\,,\ \ldots\,,\ S_q\,,$$

auxquels correspondent les groupes successifs d'inconnues

$$s_1\,,\ s_2\,,\ \ldots\,,\ s_q$$

de la façon suivante:

1° *L'ensemble de ces derniers reproduit une fois et une seule chacune des inconnues du système proposé S.*

2° *Dans le groupe S_k $(k = 1\,, 2\,, \ldots, q)$ se trouvent engagées les seules inconnues*

$$s_k\,,\ s_{k+1}\,,\ \ldots\,,\ s_q\,.$$

3° *Si le groupe S_k n'est pas entièrement dépourvu d'équations, la substitution aux inconnues*

$$s_{k+1}\,,\ \ldots\,,\ s_q$$

d'intégrales quelconques du système

$$S_{k+1}\,,\ \ldots\,,\ S_q$$

transforme S_k, soit en un groupe de formules exprimant les inconnues s_k à l'aide des variables indépendantes, soit en un système orthonome passif aux seules inconnues s_k.

L'intégration du système proposé S se ramène ainsi à l'intégration successive de divers systèmes orthonomes passifs, et la seule connaissance des premiers membres de

$$S_1\,,\ S_2\,,\ldots,\ S_q$$

permet de fixer avec une entière précision l'économie des conditions initiales dont la donnée détermine entièrement un groupe d'intégrales du système S.

CINQUIÈME PARTIE.

Propositions diverses sur les systèmes non orthonomes.

28. Nous nous proposons, dans le présent chapitre, d'examiner certaines formes différentielles non orthonomes, et d'établir, pour des données initiales convenablement choisies, l'existence de leurs intégrales.

Une fonction $f(x\,,y\,,\ldots)$ de variables en nombre quelconque sera dite *quasi-exponentielle,* si, en désignant par $M_0\,,\ \alpha$ des constantes positives convenablement choisies, et par $x_0\,,\ y_0\,,\ldots$ des valeurs particulières convenablement choisies de $x\,,\ y\,,\ldots,$ elle admet pour majorante (22, I), relativement aux valeurs $x_0\,,\ y_0\,,\ldots,$ la fonction

$$\Psi(x\,,y\,,\ldots) = M_0 e^{\alpha[(x-x_0)+(y-y_0)+\ldots]}.$$

D'après cette définition, une fonction quasi-exponentielle est développable à l'aide d'une série entière indéfiniment convergente. En outre, comme nous allons maintenant le prouver, elle jouit, en tout point analytique $(x_1\,,y_1\,,\ldots)$, d'une propriété semblable à celle que la définition précédente lui assigne en $(x_0\,,y_0\,,\ldots)$. Effectivement, si l'on développe, à partir de $x_0\,,\ y_0\,,\ldots,$ les deux quantités

$$f(x_1\,,y_1\,,\ldots)\,,\quad \Psi(x_1\,,y_1\,,\ldots),$$

il résulte de la définition des majorantes que chaque terme du premier

développement a un module inférieur à celui du terme correspondant du second; à plus forte raison le module du premier développement est-il moindre que la somme des modules des termes du second; or, le second ayant tous ses coefficients positifs, il est clair qu'en désignant par $\xi_1, \eta_1, \ldots$ les modules respectifs des différences $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$, ..., la somme des modules de ses termes est

$$M_0 e^{a(\xi_1+\eta_1+\ldots)};$$

on aura donc

$$\text{mod}\, f(x_1, y_1, \ldots) < M_0 e^{a(\xi_1+\eta_1+\ldots)}.$$

Un raisonnement semblable, appliqué aux fonctions

$$f^{(p,q,\ldots)}_{x,y,\ldots}(x, y, \ldots),\quad \Psi^{(p,q,\ldots)}_{x,y,\ldots}(x, y, \ldots) = M_0 a^{p+q+\ldots} e^{a[(x-x_0)+(y-y_0)+\ldots]},$$

dont la première a pour majorante la seconde, conduira à l'inégalité

$$\text{mod}\, f^{(p,q,\ldots)}_{x,y,\ldots}(x_1, y_1, \ldots) < M_0 a^{p+q+\ldots} e^{a(\xi_1+\eta_1+\ldots)}.$$

En posant $M_0 e^{a(\xi_1+\eta_1+\ldots)} = M_1$, il vient finalement

$$\text{mod}\, f(x_1, y_1, \ldots) < M_1,$$
$$\text{mod}\, f^{(p,q,\ldots)}_{x,y,\ldots}(x_1, y_1, \ldots) < M_1 a^{p+q+\ldots},$$

ce qui revient à dire que, relativement aux valeurs x_1, y_1, ..., la fonction $f(x, y, \ldots)$ a pour majorante

$$M_1 e^{a[(x-x_1)+(y-y_1)+\ldots]}.$$

Les fonctions quasi-exponentielles donnent encore lieu aux remarques suivantes:

I. *Toutes les dérivées d'une fonction quasi-exponentielle $f(x, y, \ldots)$ sont elles-mêmes quasi-exponentielles.*

Posons en effet

$$f^{(p',q',\ldots)}_{x,y,\ldots}(x, y, \ldots) = \varphi(x, y, \ldots)$$

et

$$M_0 \alpha^{p'+q'+\cdots} = M'_0.$$

La fonction $f(x, y, \ldots)$ étant quasi-exponentielle, il résulte de la définition que l'on a, pour toutes valeurs positives ou nulles des entiers $p, q, \ldots,$

$$\operatorname{mod} f_{x, y, \ldots}^{(p'+p, q'+q, \ldots)}(x_0, y_0, \ldots) < M_0 \alpha^{(p'+p)+(q'+q)+\cdots}$$

ou

$$\operatorname{mod} \varphi_{x, y, \ldots}^{(p, q, \ldots)}(x_0, y_0, \ldots) < M'_0 \alpha^{p+q+\cdots}.$$

La fonction $\varphi(x, y, \ldots)$ a donc pour majorante, relativement aux valeurs $x_0, y_0, \ldots,$

$$M'_0 e^{\alpha[(x-x_0)+(y-y_0)+\cdots]}.$$

II. *Si l'on effectue sur une fonction quasi-exponentielle un nombre quelconque de quadratures simples, en ayant soin que le résultat de chacune d'elles se réduise, pour une valeur particulière donnée de la variable qu'elle intéresse, à une fonction quasi-exponentielle des variables restantes, le résultat final de l'opération est lui-même une fonction quasi-exponentielle.*

On peut évidemment se borner au cas d'une seule quadrature, relative, par exemple, à la variable x. Cela étant, supposons que le résultat d'une pareille quadrature, exécutée sur la fonction quasi-exponentielle $f(x, y, \ldots)$, doive se réduire, pour $x = x_0$, à la fonction quasi-exponentielle $\omega(y, \ldots)$, et soient $y_0, \ldots$ des valeurs particulières quelconques de $y, \ldots,$

$$\sum_{p, q, \ldots} a_{p, q, \ldots} \frac{(x-x_0)^p}{1.2\ldots p} \frac{(y-y_0)^q}{1.2\ldots q} \cdots,$$

$$\sum_{q, \ldots} b_{q, \ldots} \frac{(y-y_0)^q}{1.2\ldots q} \cdots$$

les développements respectifs de $f(x, y, \ldots)$, $\omega(y, \ldots)$ à partir de x_0, $y_0, \ldots$. L'intégrale, développée à partir des mêmes valeurs, a évidemment pour expression

$$F(x, y, \ldots) = \sum_{q, \ldots} b_{q, \ldots} \frac{(y-y_0)^q}{1.2\ldots q} \cdots + \sum_{p, q, \ldots} a_{p, q, \ldots} \frac{(x-x_0)^{p+1}}{1.2\ldots p(p+1)} \frac{(y-y_0)^q}{1.2\ldots q} \cdots.$$

D'un autre côté, si l'on désigne par M_0, α, N_0, β quatre constantes po-

sitives convenablement choisies, on a, puisque $f(x, y, \ldots)$ et $\omega(y, \ldots)$ sont quasi-exponentielles,

$$\operatorname{mod} a_{p,q,\ldots} < M_0 \alpha^{p+q+\cdots}, \quad \operatorname{mod} b_{q,\ldots} < N_0 \beta^{q+\cdots},$$

ou

$$\operatorname{mod} a_{p,q,\ldots} < \frac{M_0}{\alpha} \alpha^{(p+1)+q+\cdots}, \quad \operatorname{mod} b_{q,\ldots} < N_0 \beta^{q+\cdots};$$

on en tire à plus forte raison, en désignant par P_0 la plus grande des quantités $\frac{M_0}{\alpha}$, N_0, et par γ la plus grande des quantités α, β,

$$\operatorname{mod} a_{p,q,\ldots} < P_0 \gamma^{(p+1)+q+\cdots}, \quad \operatorname{mod} b_{q,\ldots} < P_0 \gamma^{q+\cdots},$$

c'est à dire

$$\operatorname{mod} F_{x,y,\ldots}^{(p+1,q,\ldots)}(x_0, y_0, \ldots) < P_0 \gamma^{(p+1)+q+\cdots},$$

$$\operatorname{mod} F_{x,y,\ldots}^{(0,q,\ldots)}(x_0, y_0, \ldots) < P_0 \gamma^{q+\cdots}.$$

La fonction $F(x, y, \ldots)$ est donc elle-même quasi-exponentielle, ce que nous voulions établir.

III. *Toute fonction composée à l'aide d'une composante entière et de fonctions simples quasi-exponentielles est elle-même quasi-exponentielle.*[1]

Il suffit évidemment d'établir cette propriété pour une somme et un produit de deux fonctions quasi-exponentielles.

Or, si les fonctions $f(x, y, \ldots)$, $\varphi(x, y, \ldots)$ sont toutes deux quasi-exponentielles, on a, en désignant par M_0, α, N_0, β quatre constantes positives convenablement choisies, et pour toutes valeurs positives ou nulles des entiers $p, q, \ldots$,

$$\operatorname{mod} f_{x,y,\ldots}^{(p,q,\ldots)}(x_0, y_0, \ldots) < M_0 \alpha^{p+q+\cdots},$$

$$\operatorname{mod} \varphi_{x,y,\ldots}^{(p,q,\ldots)}(x_0, y_0, \ldots) < N_0 \beta^{p+q+\cdots}.$$

En désignant par P_0 la plus grande des deux quantités M_0, N_0, et par γ la plus grande des deux quantités α, β, on aura à plus forte raison

[1] Voir la note de la page 264.

$$\operatorname{mod} f_{x,y,\ldots}^{(p,q,\ldots)}(x_0\,,\,y_0\,,\,\ldots) < P_0\gamma^{p+q+\cdots},$$

$$\operatorname{mod} \varphi_{x,y,\ldots}^{(p,q,\ldots)}(x_0\,,\,y_0\,,\,\ldots) < P_0\gamma^{p+q+\cdots},$$

d'où l'on déduit, par addition membre à membre,

$$\operatorname{mod} f_{x,y,\ldots}^{(p,q,\ldots)}(x_0\,,\,y_0\,,\,\ldots) + \operatorname{mod} \varphi_{x,y,\ldots}^{(p,q,\ldots)}(x_0\,,\,y_0\,,\,\ldots) < 2P_0\gamma^{p+q+\cdots},$$

et à plus forte raison

$$\operatorname{mod} [f_{x,y,\ldots}^{(p,q,\ldots)}(x_0\,,\,y_0\,,\,\ldots) + \varphi_{x,y,\ldots}^{(p,q,\ldots)}(x_0\,,\,y_0\,,\,\ldots)] < 2P_0\gamma^{p+q+\cdots}.$$

La somme des deux fonctions données est donc quasi-exponentielle.

Si l'on considère maintenant le produit

$$G(x\,,\,y\,,\,\ldots) = f(x\,,\,y\,,\,\ldots)\,.\,\varphi(x\,,\,y\,,\,\ldots),$$

et qu'on le différentie p fois par rapport à x, q fois par rapport à y, etc., sans effectuer jamais la réduction des termes semblables, on a finalement une somme composée de $2^{p+q+\cdots}$ termes; chacun de ces termes est d'ailleurs un produit de deux dérivées appartenant respectivement à f et à φ, et dont les ordres totaux respectifs ont pour somme $p+q+\ldots$. On a donc, en donnant à P_0 et γ la même signification que ci-dessus,

$$\operatorname{mod} G_{x,y,\ldots}^{(p,q,\ldots)}(x_0\,,\,y_0\,,\,\ldots) < 2^{p+q+\cdots}P_0^2\gamma^{p+q+\cdots},$$

ou

$$\operatorname{mod} G_{x,y,\ldots}^{(p,q,\ldots)}(x_0\,,\,y_0\,,\,\ldots) < P_0^2(2\gamma)^{p+q+\cdots}.$$

Le produit $G(x\,,\,y\,,\,\ldots)$ est donc quasi-exponentiel.

29. *Si dans un système orthoïque passif, linéaire par rapport à l'ensemble des inconnues et de leurs dérivées, les termes indépendants de ces quantités sont tous quasi-exponentiels, et que les autres coefficients se réduisent tous à des constantes; si, de plus, les fonctions, en nombre fini, dont la donnée détermine entièrement un groupe d'intégrales hypothétiques du système, sont toutes quasi-exponentielles: les intégrales dont il s'agit existent effectivement et sont elles-mêmes quasi-exponentielles.*

I. Nous observerons tout d'abord qu'en vertu des n°s 2, 3, 4, et des remarques faites au numéro précédent 28, les déterminations initiales des intégrales hypothétiques sont toutes quasi-exponentielles.

Cela étant, soient $u, v, \ldots$ les fonctions inconnues du système proposé, que nous désignerons par (S); $I_u, I_v, \ldots$ leurs déterminations initiales respectives; $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$ de nouvelles fonctions inconnues. Si, comme à l'alinéa VI du n° 22, on effectue la transformation

$$\begin{cases} u = I_u + \mathfrak{u}, \\ v = I_v + \mathfrak{v}, \\ \ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

en attribuant à $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$ les mêmes cotes respectives qu'à $u, v, \ldots$, on voit immédiatement: 1° que le système $(\mathfrak{S})$ ainsi obtenu est orthoïque comme le proposé, et que, sauf le changement de $u, v, \ldots$ en $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$, les dérivées des fonctions inconnues s'y répartissent de la même manière en principales et paramétriques; 2° que le système $(\mathfrak{S})$ est, comme le proposé, linéaire par rapport à l'ensemble des inconnues et de leurs dérivées, que les termes indépendants de ces quantités y sont tous quasi-exponentiels, et les autres coefficients tous constants; 3° enfin, que si l'on impose d'une part aux intégrales hypothétiques de (S) les déterminations initiales $I_u, I_v, \ldots$, d'autre part à celles de $(\mathfrak{S})$ des déterminations initiales identiquement nulles, les relations primitives, numériquement concordantes dans le premier cas, le seront aussi dans le second, et fourniront, pour les dérivées principales semblables des inconnues correspondantes, les mêmes valeurs initiales. En conséquence, *tout revient à prouver: 1° la convergence des développements des intégrales hypothétiques qui, dans le système* $(\mathfrak{S})$, *répondent à des déterminations initiales identiquement nulles; 2° la nature quasi-exponentielle de ces intégrales.*

II. *Si, dans les seconds membres de* $(\mathfrak{S})$, *on remplace les termes indépendants par certaines majorantes relatives aux valeurs initiales* $x_0, y_0, \ldots$ *des variables* $x, y, \ldots$, *puis tous les autres coefficients (non nuls) par certaines constantes positives respectivement supérieures à leurs modules, le système résultant* $((\mathfrak{S}))$ *admet un groupe d'intégrales qui s'annulent toutes en* $x_0, y_0, \ldots$, *tandis que leurs dérivées de tous ordres y prennent des valeurs initiales essentiellement positives.*

Les termes indépendants qui figurent dans les seconds membres de $(\mathfrak{S})$ étant tous quasi-exponentiels, on peut assigner deux constantes po-

sitives, H, γ, telles, que les termes indépendants dont il s'agit admettent tous pour majorante, relativement aux valeurs x_0, y_0, ..., la fonction

$$He^{\gamma[(x-x_0)+(y-y_0)+\ldots]}.$$

Je désigne en outre par μ une constante positive quelconque, qui sera fixée ultérieurement.

Cela étant, je considère une équation quelconque ($\mathfrak{s}$) du système ($\mathfrak{S}$), j'appelle n l'ordre du premier membre, r l'ordre du second, et je pose

$$(65) \qquad M = \gamma^n - M_0 - M_1\gamma - M_2\gamma^2 - \ldots - M_r\gamma^r:$$

dans la formule (65), M_0, M_1, M_2, ..., M_r désignent autant de constantes positives ou nulles; la constante M_0 sera choisie positive ou nulle, suivant que l'équation ($\mathfrak{s}$) contiendra ou non dans son second membre quelqu'une des fonctions inconnues $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, ... du système ($\mathfrak{S}$); même alternative pour la constante M_1, suivant que l'équation ($\mathfrak{s}$) contiendra ou non dans son second membre quelque dérivée première de $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, ...; pour la constante M_2, suivant que l'équation ($\mathfrak{s}$) contiendra ou non dans son second membre quelque dérivée seconde de $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, ...; et ainsi de suite jusqu'à M_r; enfin, celles des constantes M_0, M_1, M_2, ..., M_r qui ne sont pas nulles seront choisies suffisamment petites pour que la valeur de M définie par la formule (65) soit positive. Désignant alors par w une fonction inconnue de la variable indépendante t, je considère l'équation différentielle

$$(66) \qquad \frac{\partial^n w}{\partial t^n} = M_0\mu + M\mu e^{\gamma t} + M_0 w + M_1\frac{\partial w}{\partial t} + \ldots + M_r\frac{\partial_r w}{\partial t^r},$$

et je remarque qu'en vertu de la relation (65) elle admet l'intégrale

$$W(t) = \mu(e^{\gamma t} - 1),$$

qui s'annule pour $t = 0$, tandis que ses dérivées de tous ordres y prennent des valeurs initiales essentiellement positives. Cette équation (66) peut d'ailleurs s'écrire sous une forme un peu différente, comme il suit: je laisse intacts le premier membre et les deux premiers termes du second membre; si M_0 n'est pas nul, j'appelle q_0 le nombre des termes qui, dans le second membre de ($\mathfrak{s}$), contiennent quelqu'une des fonctions inconnues

$\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$, et je remplace, dans le second membre de (66), le terme $M_0 w$ par une somme de q_0 termes égaux chacun à $\frac{M_0}{q_0} w$; si M_1 n'est pas nul, j'appelle q_1 le nombre des termes qui, dans le second membre de ($\mathfrak{s}$), contiennent quelque dérivée première de $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$, et je remplace, dans le second membre de (66), le terme $M_1 \frac{\partial w}{\partial t}$ par une somme de q_1 termes égaux chacun à $\frac{M_1}{q_1} \frac{\partial w}{\partial t}$; et ainsi de suite jusqu'au dernier terme $M_r \frac{\partial^r w}{\partial t^r}$. De cette manière, je fais correspondre à l'équation ($\mathfrak{s}$) du système ($\mathfrak{S}$) une certaine équation différentielle

(66 bis),

écrite d'une certaine manière, et impliquant la fonction inconnue w de la variable indépendante t; au terme indépendant qui figure dans le second membre de ($\mathfrak{s}$) correspond, dans l'équation (66 bis), $M_0 \mu + M \mu e^{\gamma t}$; à tout autre terme (supposé effectif) du second membre de ($\mathfrak{s}$) correspond le produit d'une constante positive par l'une ou l'autre des quantités w, $\frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \ldots$, suivant que le terme considéré de ($\mathfrak{s}$) est d'ordre o, 1, 2, ...

Cela posé, aux variables indépendantes et aux fonctions inconnues

$$x, y, \ldots, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$$

du système orthoïque ($\mathfrak{S}$), faisons correspondre autant de constantes positives

$$\xi, \eta, \ldots, \upsilon, \psi, \ldots,$$

que nous nommerons, pour abréger, leurs *poids* respectifs; considérant ensuite l'une quelconque des dérivées des inconnues, appelons *poids* de cette dérivée le quotient obtenu en divisant le poids de la fonction à laquelle elle appartient par ceux de toutes les variables de différentiation, distinctes ou non. Dans l'équation (66 bis), nous remplacerons le terme indépendant $M_0 \mu + M \mu e^{\gamma t}$ par

$$M_0 \mu + M \mu e^{\gamma[\xi(x-x_0)+\eta(y-y_0)+\ldots]};$$

considérant ensuite le premier membre de (66 bis) ou tout autre terme du second membre, nous le comparerons au terme correspondant de l'équation ($\mathfrak{s}$), nous remplacerons la dérivée de w (d'ordre positif ou nul) qui

figure dans le terme considéré de (66 bis) par la dérivée de $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$ (d'ordre égal) qui figure dans le terme correspondant de ($\mathfrak{s}$), et, cette substitution une fois faite, nous multiplierons la dérivée en question par son poids; enfin, nous réduirons à l'unité le coefficient du premier membre. On voit immédiatement que l'équation résultante (($\mathfrak{s}$)) est identiquement vérifiée pour

$$(67)\quad \begin{cases} \mathfrak{u} = \frac{1}{v} W[\xi(x-x_0) + \eta(y-y_0) + \ldots], \\ \mathfrak{v} = \frac{1}{\psi} W[\xi(x-x_0) + \eta(y-y_0) + \ldots], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

A chaque équation du système ($\mathfrak{S}$) on fera correspondre de même une équation telle que (($\mathfrak{s}$)), et l'on tombera ainsi sur un système (($\mathfrak{S}$)), identiquement vérifié par la substitution à $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$ des seconds membres des formules (67), c'est à dire de fonctions qui s'annulent pour

$$x - x_0 = y - y_0 = \ldots = 0,$$

tandis que leurs dérivées de tous ordres prennent des valeurs initiales essentiellement positives.

Dans ce qui suit, je nommerai

P une constante positive supérieure au plus grand module que puissent atteindre, dans le système ($\mathfrak{S}$), les coefficients (constants) des termes non indépendants des seconds membres;

$h_2, h_3, \ldots, h_p$ les plus petites valeurs que puissent respectivement atteindre les cotes seconde, troisième, ..., $p^{\text{ième}}$ des diverses variables indépendantes;

$j_2, j_3, \ldots, j_p$ les plus petites valeurs et $J_2, J_3, \ldots, J_p$ les plus grandes valeurs que puissent respectivement atteindre celles des fonctions $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$ et de leurs diverses dérivées figurant effectivement dans le système ($\mathfrak{S}$);

ε la plus petite valeur que puissent atteindre, dans l'équation différentielle (66 bis) et autres analogues, les coefficients (constants) des termes non indépendants que contiennent effectivement leurs seconds membres.

Désignant en outre par

$$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$$

p constantes positives dont les valeurs vont être fixées dans un instant, nous prendrons: 1° pour chacune des quantités $\xi, \eta, \ldots$ un produit de puissances de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ d'exposants respectivement égaux aux cotes première, seconde, ..., $p^{\text{ième}}$ de la variable correspondante; 2° pour chacune des quantités $\upsilon, \psi, \ldots$ le quotient de 1 par des puissances de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ d'exposants respectivement égaux aux cotes première, seconde, ..., $p^{\text{ième}}$ de la fonction inconnue correspondante. Le poids d'une dérivée quelconque (y compris l'ordre zéro) aura alors pour valeur le quotient de 1 par des puissances de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ d'exposants respectivement égaux aux cotes première, seconde, ..., $p^{\text{ième}}$ de la dérivée considérée.

Cela étant, nous déterminerons successivement $\theta_p, \theta_{p-1}, \ldots, \theta_2, \theta_1$ à l'aide des relations

$$\begin{cases} \theta_p > 1, \\ \theta_p > \dfrac{P}{\varepsilon}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_{p-1} > 1, \\ \theta_{p-1} > \dfrac{P}{\varepsilon}\theta_p^{J_p-j_p}; \end{cases}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{cases} \theta_2 > 1, \\ \theta_2 > \dfrac{P}{\varepsilon}\theta_3^{J_3-j_3}\ldots\theta_p^{J_p-j_p}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_1 > 1, \\ \theta_1 > \dfrac{P}{\varepsilon}\theta_2^{J_2-j_2}\theta_3^{J_3-j_3}\ldots\theta_p^{J_p-j_p}, \\ \theta_1 > \theta_2^{-h_2}\theta_3^{-h_3}\ldots\theta_p^{-h_p}. \end{cases}$$

Dans ces conditions, tout coefficient non indépendant pris dans les seconds membres du système ($\mathfrak{S}$) a, comme nous allons le faire voir, un module inférieur au coefficient correspondant (positif) du système (($\mathfrak{S}$)).

Considérons en effet deux équations correspondantes, ($\mathfrak{s}$) et (($\mathfrak{s}$)), des deux systèmes, et une dérivée (d'ordre positif ou nul) figurant effectivement dans le second membre de ($\mathfrak{s}$). En vertu de la définition des systèmes orthoïques, cette dérivée (d'ordre positif ou nul) possède: soit une cote première

inférieure à celle du premier membre; soit une cote première égale à celle du premier membre, avec une cote seconde inférieure; ...; soit des cotes première, seconde, ..., $(p-2)^{\text{ième}}$ respectivement égales à celles du premier membre, avec une cote $(p-1)^{\text{ième}}$ inférieure; soit enfin des cotes première, seconde, ..., $(p-1)^{\text{ième}}$ respectivement égales à celles du premier membre, avec une cote $p^{\text{ième}}$ inférieure. Comme les quantités θ_1, $\theta_2, \dots, \theta_p$ sont toutes plus grandes que 1, le coefficient de la dérivée considérée dans le second membre de l'équation $(\!(\mathfrak{s})\!)$ possède, suivant le cas, une valeur supérieure à l'une ou à l'autre des quantités

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon\theta_p^{j_p-J_p}\dots\theta_3^{j_3-J_3}\theta_2^{j_2-J_2}\theta_1,\\
&\varepsilon\theta_p^{j_p-J_p}\dots\theta_3^{j_3-J_3}\theta_2,\\
&\dots\dots\dots\\
&\varepsilon\theta_p^{j_p-J_p}\theta_{p-1},\\
&\varepsilon\theta_p;
\end{aligned}
$$

il est donc forcément supérieur à P, et par suite au module du coefficient correspondant du second membre de l'équation $(\mathfrak{s})$.

Les quantités $\xi, \eta, \dots$ sont en outre toutes supérieures à 1: car, la cote première de toute variable étant positive et au moins égale à 1, chacune des quantités dont il s'agit est au moins égale à

$$\theta_1\theta_2^{h_2}\theta_3^{h_3}\dots\theta_p^{h_p},$$

par suite supérieure à 1.

Si, après avoir ainsi fixé $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$, on désigne par ω le poids maximum des premiers membres de $(\!(\mathfrak{S})\!)$, par λ la plus petite des constantes M définies par la relation (65) et autres analogues, et que l'on prenne $\mu > \frac{\omega H}{\lambda}$, le coefficient de

$$e^{\gamma[\xi(x-x_0)+\eta(y-y_0)+\dots]},$$

dans l'un quelconque des termes indépendants des seconds membres de $(\!(\mathfrak{S})\!)$, ayant une valeur au moins égale à $\frac{\mu\lambda}{\omega}$, sera par suite supérieur à H; donc le terme indépendant considéré, dans lequel figure, outre l'ex-

ponentielle dont je viens de parler, une constante additive supérieure à zéro, est une majorante pour

$$He^{\gamma[\xi(x-x_0)+\eta(y-y_0)+\dots]};$$

à plus forte raison, puisque les quantités $\xi, \eta, \dots$ sont toutes supérieures à 1, sera-t-il une majorante pour

$$He^{\gamma[(x-x_0)+(y-y_0)+\dots]},$$

à plus forte raison enfin pour le terme indépendant qui lui correspond dans le système $(\mathfrak{S})$.

En résumé donc, si l'on considère dans les seconds membres de $(\mathfrak{S})$ un terme indépendant quelconque, ce dernier a pour majorante le terme indépendant qui lui correspond dans le système $((\mathfrak{S}))$; les autres coefficients (constants et non nuls) des seconds membres de $(\mathfrak{S})$ se trouvent remplacés dans $((\mathfrak{S}))$ par certaines constantes positives respectivement supérieures à leurs modules; enfin le système $((\mathfrak{S}))$ admet un groupe d'intégrales qui s'annulent en $x_0, y_0, \dots$, tandis que leurs dérivées de tous ordres y prennent des valeurs initiales positives.

III. *Les intégrales hypothétiques de* $(\mathfrak{S})$ *qui, pour*

$$x - x_0 = y - y_0 = \dots = 0,$$

ont des déterminations initiales identiquement nulles, ont des développements nécessairement convergents et sont quasi-exponentielles, ce qui achève la démonstration.

La convergence se prouve par un raisonnement tout semblable à celui de l'alinéa IX du n° 22, en établissant que les développements des fonctions (67) sont majorants pour ceux des intégrales hypothétiques de $(\mathfrak{S})$ qui répondent à des déterminations initiales identiquement nulles.

D'ailleurs, en désignant par b la plus petite des quantités $\upsilon, \psi, \dots$, et par A la plus grande des quantités $\xi, \eta, \dots$, toute dérivée partielle d'ordre n des fonctions (67) a une valeur initiale dont le module tombe au dessous de $\frac{\mu}{b}(A\gamma)^n$; les fonctions (67) ont donc pour majorante commune

$$\frac{\mu}{b}e^{A\gamma[(x-x_0)+(y-y_0)+\dots]};$$

à plus forte raison les intégrales de ($\mathfrak{S}$) dont nous venons de démontrer l'existence admettent-elles pour majorante commune cette même fonction.

IV. L'énoncé formulé au début du présent numéro 29 cesserait d'être exact, si l'on substituait aux fonctions quasi-exponentielles, que j'y considère, certaines fonctions exprimables par un développement entier indéfiniment convergent: nous avons effectivement constaté, à l'alinéa I du n° 20, que si l'on assujettit une intégrale hypothétique de l'équation $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ à se réduire, pour $x = 0$, à une certaine série entière en y indéfiniment convergente, le développement, construit *a priori*, de l'intégrale est divergent.

30. Considérons un système différentiel où se trouvent réalisées à la fois les diverses conditions énoncées ci-après:

1° Le système est résolu par rapport à certaines dérivées, dont l'ensemble, comparé à celui des dérivées figurant dans les seconds membres, n'offre avec lui aucune variable de différentiation commune (de cette première hypothèse résulte, comme nous le verrons dans un instant, la nature orthoïque du système).

2° Si l'on forme un premier groupe $(x, y, \ldots)$ avec les variables de différentiation des premiers membres, et un deuxième groupe $(z, s, \ldots)$ avec toutes les variables restantes, les seconds membres, supposés linéaires par rapport aux inconnues et à leurs dérivées, ont de plus la forme entière par rapport aux variables du groupe $(z, s, \ldots)$; relativement à celles-ci, les termes indépendants des inconnues et de leurs dérivées ont des degrés quelconques, et le coefficient de tout autre terme un degré au plus égal à l'ordre du terme; relativement aux variables $(x, y, \ldots)$, ces diverses fonctions sont développables dans un même domaine.

3° Les conditions de passivité du système sont supposées satisfaites.

Cela étant, et les fonctions, en nombre fini, dont la donnée détermine entièrement un groupe d'intégrales hypothétiques (ordinaires) du système, étant choisies sous la seule restriction d'être entières par rapport aux variables $(z, s, \ldots)$, *les intégrales dont il s'agit existent effectivement, et ont elles-mêmes la forme entière par rapport aux variables* $(z, s, \ldots)$.

I. De la première des conditions supposées résulte la nature orthoïque du système.

Effectivement, le système est résolu par rapport à certaines dérivées, qui ne figurent, non plus que leurs propres dérivées, dans aucun des seconds membres. Si d'autre part on désigne par Q un entier supérieur à l'ordre maximum des dérivées figurant dans les seconds membres, et que l'on attribue aux fonctions inconnues la cote zéro, aux variables $x, y, \ldots$ la cote Q, et aux variables $z, s, \ldots$ la cote 1, chaque premier membre aura une cote au moins égale à Q, et chaque inconnue ou dérivée figurant dans les seconds membres une cote inférieure à Q.

II. On peut, dans la démonstration de la convergence des développements des intégrales, se borner au cas où les déterminations initiales sont toutes identiquement nulles.

Effectivement, les déterminations initiales sont, d'après l'hypothèse, forcément entières en $z, s, \ldots$. Cela étant, si on les ramène, par la transformation connue (22, VI), à être toutes identiquement nulles, le système transformé est identique au proposé, à cela près que les termes indépendants des inconnues et de leurs dérivées se trouvent remplacés par d'autres qui sont, comme eux, entiers par rapport aux variables $z, s, \ldots$.

III. Je considère un polynome entier de degré N en $z-z_0, s-s_0, \ldots$, les coefficients de ce polynome étant des fonctions de $x, y, \ldots$ développables dans un domaine de $x_0, y_0, \ldots$, et j'appelle

r une première constante positive moindre que les rayons du domaine;

M une deuxième supérieure à toutes celles que l'on obtient, lorsque, après avoir développé ces mêmes fonctions à partir de $x_0, y_0, \ldots$, on remplace dans ces développements les coefficients par leurs modules, et les différences $x - x_0, y - y_0, \ldots$ par la constante r;

$\alpha_x, \alpha_y, \ldots$ des constantes positives au moins égales à $\frac{1}{r}$;

m un entier positif;

$\theta_N(t)$ la fonction entière $1 + t + t^2 + \ldots + t^N$.

Cela étant, la fonction

$$\Omega(x, y, \ldots, z, s, \ldots) = \frac{M\theta_N[(z - z_0) + (s - s_0) + \ldots]}{[1 - \alpha_x(x - x_0) - \alpha_y(y - y_0) - \ldots]^m}$$

est une majorante du polynome proposé, $P(x, y, \ldots, z, s, \ldots)$, *relativement aux valeurs particulières* $x_0, y_0, \ldots, z_0, s_0, \ldots$.

Posons en effet

$$\Psi(x, y, \ldots) = \frac{M}{[1 - a_x(x - x_0) - a_y(y - y_0) - \ldots]^m},$$

d'où l'on tire

$$\Omega(x, y, \ldots, z, s, \ldots) = \Psi(x, y, \ldots) \cdot \theta_N[(z - z_0) + (s - s_0) + \ldots]$$

et

$$(68) \qquad \frac{\partial^{i+l+\ldots+k+g+\ldots}\Omega}{\partial x^i \partial y^l \ldots \partial z^k \partial s^g \ldots} = \frac{\partial^{i+l+\ldots}\Psi}{\partial x^i \partial y^l \ldots} \cdot \frac{\partial^{k+g+\ldots}\theta_N}{\partial z^k \partial s^g \ldots}.$$

Puisque P et Ω sont des polynomes de degré N en $z - z_0, s - s_0, \ldots$, toute dérivée de P ou Ω a une valeur initiale nulle, dès que la somme de ses ordres partiels relatifs à $z, s, \ldots$ est supérieure à N. On a d'ailleurs, pour $i + l + \ldots \geqq 0$, et en faisant suivre de l'indice zéro les notations des diverses fonctions à considérer et de leurs dérivées pour désigner leurs valeurs particulières en $x_0, y_0, \ldots, z_0, s_0, \ldots$,

$$\left[\frac{\partial^{i+l+\ldots}\Psi}{\partial x^i \partial y^l \ldots}\right]_0 = M a_x^i a_y^l \ldots \times m(m+1)\ldots(m+i-1)$$
$$\times (m+i)(m+i+1)\ldots(m+i+l-1)$$
$$\times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et à plus forte raison

$$\left[\frac{\partial^{i+l+\ldots}\Psi}{\partial x^i \partial y^l \ldots}\right]_0 \geqq M \frac{1 \cdot 2 \ldots i}{r^i} \cdot \frac{1 \cdot 2 \ldots l}{r_l} \ldots,$$

d'où l'on tire, en désignant par $A_{k,g,\ldots}$ le coefficient du terme en

$$(z - z_0)^k (s - s_0)^g \ldots$$

dans le polynome P,

$$(69) \qquad \left[\frac{\partial^{i+l+\ldots}\Psi}{\partial x^i \partial y^l \ldots}\right]_0 > \operatorname{mod}\left[\frac{\partial^{i+l+\ldots}A_{k,g,\ldots}}{\partial x^i \partial y^l \ldots}\right]_0.$$

On a d'autre part, pour $0 \leqq k + g + \ldots \leqq N$,

$$(70) \qquad \left[\frac{\partial^{k+g+\ldots}\theta_N}{\partial z^k \partial s^g \ldots}\right]_0 = 1 \cdot 2 \ldots (k + g + \ldots) \geqq 1 \cdot 2 \ldots k \cdot 1 \cdot 2 \ldots g \ldots.$$

Des relations (68), (69) et (70) on déduit

$$\left[\frac{\partial^{i+l+\ldots+k+g+\ldots}\Omega}{\partial x^i \partial y^l \ldots \partial z^k \partial s^g \ldots}\right]_0 > 1 \cdot 2 \ldots k \times 1 \cdot 2 \ldots g \times \ldots \times \operatorname{mod}\left[\frac{\partial^{i+l+\ldots}A_{k,g,\ldots}}{\partial x^i \partial y^l \ldots}\right]_0$$

c'est à dire

$$\left[\frac{\partial^{i+l+\dots+k+g+\dots} Q}{\partial x^i \partial y^l \dots \partial z^k \partial s^g \dots}\right]_0 > \mathrm{mod}\left[\frac{\partial^{i+l+\dots+k+g+\dots} P}{\partial x^i \partial y^l \dots \partial z^k \partial s^g \dots}\right]_0.$$

IV. *Si l'on désigne par w une fonction inconnue des deux variables indépendantes ξ et σ, par $\theta_n(\sigma)$ la fonction entière $1+\sigma+\sigma^2+\dots+\sigma^n$, et par $M, r, g_0, g_1, g_2, \dots, g_K$ des constantes positives quelconques, l'équation aux dérivées partielles*

$$(71)\quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{M}{1-\frac{\xi}{r}}\left[\theta_K(\sigma) + g_0 w + g_1\theta_1(\sigma)\frac{\partial w}{\partial \sigma} + g_2\theta_2(\sigma)\frac{\partial^2 w}{\partial \sigma^2} + \dots + g_K\theta_K(\sigma)\frac{\partial^K w}{\partial \sigma^K}\right]$$

admet quelque intégrale possédant la double propriété: 1° d'être entière en σ; 2° de prendre, elle et ses dérivées partielles de tous ordres, des valeurs initiales positives ou nulles pour $\xi = \sigma = 0$.

Pour le démontrer, je pose

$$(72)\quad w = u_0 + u_1\sigma + u_2\sigma^2 + \dots + u_K\sigma^K,$$

$u_0, u_1, u_2, \dots, u_K$ étant des fonctions inconnues de la seule variable ξ. L'équation (71) devient:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_0}{\partial \xi} + \sigma\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \sigma^2\frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \dots + \sigma^K\frac{\partial u_K}{\partial \xi} \\
&= \frac{M}{1-\frac{\xi}{r}}[1+\sigma+\sigma^2+\dots+\sigma^K] \\
&+ \frac{M}{1-\frac{\xi}{r}} g_0[u_0 + u_1\sigma + u_2\sigma^2 + \dots + u_K\sigma^K] \\
&+ \frac{M}{1-\frac{\xi}{r}} g_1(1+\sigma)[1.u_1 + 2.u_2\sigma + \dots + K.u_K\sigma^{K-1}] \\
&+ \frac{M}{1-\frac{\xi}{r}} g_2(1+\sigma+\sigma^2)[1.2.u_2 + 2.3.u_3\sigma + \dots + (K-1)Ku_K\sigma^{K-2}] \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&+ \frac{M}{1-\frac{\xi}{r}} g_K(1+\sigma+\sigma^2+\dots+\sigma^K).1.2\dots Ku_K,
\end{aligned}$$

et l'on voit que ses deux membres sont alors de degré K en σ. En égalant les coefficients des diverses puissances de σ dans les deux membres, on a un système différentiel dont les premiers membres sont respectivement

$$\frac{\partial u_0}{\partial \xi}, \frac{\partial u_1}{\partial \xi}, \frac{\partial u_2}{\partial \xi}, \ldots, \frac{\partial u_K}{\partial \xi},$$

chaque second membre étant le produit de $\frac{M}{1-\frac{\xi}{r}}$ par une fonction linéaire de $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_K$ à coefficients positifs ou nuls; si donc on assujettit les fonctions inconnues $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_K$ à prendre, pour $\xi = 0$, des valeurs initiales positives ou nulles, il est clair que les relations primitives fourniront, pour leurs dérivées de tous ordres, des valeurs initiales jouissant de la même propriété. De là résulte, en vertu de la formule (72), que w et ses dérivées partielles de tous ordres prendront, pour $\xi = \sigma = 0$, des valeurs initiales positives ou nulles.

V. Je reviens maintenant à l'énoncé général, en supposant, comme cela est permis (II), les déterminations initiales identiquement nulles.

Pour l'établir, j'évalue le degré maximum, par rapport à $z, s, \ldots$, des fonctions de $x, y, \ldots, z, s, \ldots$ qui jouent le rôle de coefficients dans les seconds membres; j'évalue aussi l'ordre maximum des seconds membres, et je désigne par K le plus grand de ces deux entiers. Je désigne ensuite par L l'ordre maximum des premiers membres du système donné ($\mathfrak{S}$); par g_0 le nombre des fonctions inconnues; par g_1 celui de leurs dérivées premières relatives aux seules variables du groupe $(z, s, \ldots)$; et de même par $g_2, \ldots, g_K$ les nombres de leurs dérivées d'ordres respectifs $2, \ldots, K$ qui se rapportent aux seules variables de ce groupe. Soient $x_0, y_0, \ldots, z_0, s_0, \ldots$ les valeurs initiales choisies pour les variables. Chaque coefficient des seconds membres étant, d'après l'hypothèse, entier en $z - z_0, s - s_0, \ldots$, a lui-même des coefficients, fonctions développables de $x, y, \ldots$, que je nommerai, pour abréger, *sous-coefficients* du système. Je désignerai maintenant par r une quantité positive inférieure aux rayons du domaine de $x_0, y_0, \ldots$ où les divers sous-coefficients du système sont supposés à la fois développables; par M' une quantité positive supérieure à toutes celles qu'on obtient lorsque, après avoir développé ces derniers à partir de $x_0, y_0, \ldots$, on remplace, dans

les développements obtenus, les différences $x - x_0, y - y_0, \ldots$ par r, et les constantes jouant le rôle de coefficients par leurs modules; enfin, je désignerai par M une dernière quantité positive supérieure à la fois aux diverses quantités

$$M', M'\frac{r}{1}, M'\frac{r^2}{1.2}, \ldots, M'\frac{r^{L-1}}{1.2\ldots(L-1)}.$$

Cela posé, je considère l'équation aux dérivées partielles (71), et j'y adjoins toutes celles qui s'en déduisent par $1, 2, \ldots, L-1$ différentiations relatives à la variable ξ. J'aurai ainsi un système

(73)

comprenant L équations dont les premiers membres sont respectivement

$$\frac{\partial w}{\partial \xi}, \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}, \ldots, \frac{\partial^L w}{\partial \xi^L}.$$

En vertu de l'alinéa IV, l'équation (71), et par suite le système (73), admettent une intégrale entière en σ, de la forme

$$u_0 + u_1\sigma + u_2\sigma^2 + \ldots + u_K\sigma^K,$$

où $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_K$ désignent certaines fonctions de ξ, et cette intégrale possède, ainsi que ses dérivées partielles de tous ordres, des valeurs initiales positives ou nulles pour $\xi = \sigma = 0$. Nous la désignerons, pour abréger, par $W(\xi, \sigma)$.

Je considère maintenant une équation déterminée du système proposé ($\mathfrak{S}$), et à cette équation j'en fais correspondre une de la manière suivante. Désignant par q l'ordre du premier membre de l'équation considérée (q est l'un des entiers $1, 2, \ldots, L$), je choisis dans le système (73) l'équation qui a pour premier membre $\frac{\partial^q w}{\partial \xi^q}$, savoir

$$\frac{\partial^q w}{\partial \xi^q} = \frac{1.2\ldots(q-1)}{r^{q-1}} \frac{M}{\left(1-\frac{\xi}{r}\right)^q}\left[\theta_K(\sigma) + g_0 w + g_1\theta_1(\sigma)\frac{\partial w}{\partial \sigma} + \ldots + g_K\theta_K(\sigma)\frac{\partial^K w}{\partial \sigma^K}\right] + \Sigma; \tag{74}$$

dans le second membre de cette dernière, Σ désigne une somme de pro-

duits (en nombre limité) dont chacun peut contenir en facteurs: 1° une constante positive; 2° une puissance de $\frac{1}{1-\frac{\xi}{r}}$; 3° une fonction $\theta(\sigma)$ (affectée d'un certain indice); 4° une dérivée de w intéressant au moins une fois la variable ξ. Dans cette équation (74), je remplace le premier membre $\frac{\partial^q w}{\partial \xi^q}$ par celui de l'équation considérée du système ($\mathfrak{S}$); dans le premier des deux termes du second membre de (74), je remplace ξ par la somme $(x-x_0)+(y-y_0)+\ldots$, σ par la somme $(z-z_0)+(s-s_0)+\ldots$, $g_0 w$ par la somme des inconnues du système, $g_1\frac{\partial w}{\partial \sigma}$ par la somme de leurs dérivées premières relatives aux seules variables $z, s, \ldots$, etc., $g_K\frac{\partial^K w}{\partial \sigma^K}$ par la somme de leurs dérivées d'ordre K relatives aux mêmes variables; enfin, dans le second terme Σ du second membre de (74), je remplace ξ et σ par les sommes respectives $(x-x_0)+(y-y_0)+\ldots$ et $(z-z_0)+(s-s_0)+\ldots$, puis $\frac{\partial^{\alpha+\beta} w}{\partial \xi^\alpha \partial \sigma^\beta}$ par $W_{\xi,\sigma}^{(\alpha,\beta)}[(x-x_0)+(y-y_0)+\ldots, (z-z_0)+(s-s_0)+\ldots]$.

A chaque équation du système proposé ($\mathfrak{S}$) j'en fais correspondre une de la manière que je viens de dire; j'obtiens ainsi un système (($\mathfrak{S}$)), identiquement vérifié quand on y remplace toutes les fonctions inconnues par $W[(x-x_0)+(y-y_0)+\ldots, (z-z_0)+(s-s_0)+\ldots]$. En vertu des propriétés démontrées de la composante $W(\xi, \sigma)$, les intégrales dont nous venons de constater l'existence effective dans le système (($\mathfrak{S}$)) sont entières en $z, s, \ldots$, et admettent, ainsi que leurs dérivées partielles de tous ordres, des valeurs initiales positives ou nulles.

Observons maintenant que le système (($\mathfrak{S}$)) ne diffère du proposé ($\mathfrak{S}$) qu'en ce que chaque coefficient (indépendant ou non) des seconds membres s'y trouve remplacé par une majorante. D'autre part, puisque les déterminations initiales sont supposées identiquement nulles pour les intégrales hypothétiques de ($\mathfrak{S}$), les intégrales effectives de (($\mathfrak{S}$)) et leurs dérivées paramétriques ont des valeurs initiales au moins égales aux modules de celles qui ont été choisies pour les intégrales hypothétiques de ($\mathfrak{S}$) et leurs dérivées semblables. En faisant alors le raisonnement ordinaire, on verra que la même propriété subsiste pour les dérivées principales. Donc les développements des intégrales hypothétiques de ($\mathfrak{S}$)

sont, comme ceux des intégrales effectives de (($\mathfrak{S}$)), convergents et entiers en z, s, ...

31. Considérons un système différentiel S, où chacune des variables et des inconnues se trouve affectée de p cotes, et *supposons essentiellement que les cotes premières de toutes les variables indépendantes aient été choisies égales à un même entier positif.*

Supposons d'autre part que les circonstances suivantes se trouvent simultanément réalisées dans le système S:

1° Ce système, impliquant g fonctions inconnues, et composé de g équations, est résolu par rapport à g dérivées appartenant respectivement aux g fonctions inconnues, et ces g dérivées, non plus que leurs propres dérivées, ne figurent dans aucun des seconds membres, qui d'ailleurs sont supposés tous développables dans un même domaine.

2° Toute inconnue ou dérivée figurant *effectivement* dans le second membre d'une équation du système, possède une cote première au plus égale à celle du premier membre correspondant.

Finalement, dressons, pour chaque équation du système S, la liste des diverses quantités (fonctions inconnues ou dérivées) qui, figurant effectivement dans le second membre, se trouvent être anormales (6) vis à vis du premier; égalons à zéro les dérivées premières de chaque second membre, prises par rapport aux quantités anormales correspondantes, et désignons par (A) le groupe des équations ainsi obtenues.

Cela étant, si le groupe des équations (A) n'existe pas, ou, en d'autres termes, si aucun des seconds membres du système ne contient de quantité qui soit anormale vis à vis du premier membre correspondant, le système S rentre, comme cas particulier, dans la catégorie des systèmes orthonomes passifs, et l'on sait, d'après ce qui a été vu dans la troisième partie, que les intégrales ordinaires répondant à des déterminations initiales quelconques existent effectivement.

Nous allons maintenant nous occuper du cas où quelqu'une des équations du système S contient dans son second membre des quantités anormales vis à vis du premier, et établir à ce sujet la proposition suivante:

Le groupe des équations (A) *étant supposé exister, si l'on impose à des*

intégrales ordinaires hypothétiques du système S des déterminations initiales (12) *arbitrairement choisies sous la seule restriction que les équations* (A) *se trouvent numériquement vérifiées par les valeurs initiales des quantités qu'elles contiennent, les intégrales dont il s'agit ne peuvent manquer d'exister effectivement.*

I. Pour abréger, et faute d'une dénomination meilleure, nous qualifierons de *conforme* toute relation déduite du système S et satisfaisant à la fois aux deux conditions suivantes:

1° La relation dont il s'agit a pour premier membre quelque dérivée d'inconnue, et toute inconnue ou dérivée figurant effectivement dans le second membre possède une cote première au plus égale à celle du premier membre.

2° Toute dérivée première du second membre, prise par rapport à une quantité qui soit anormale vis à vis du premier, fournit, par son équation à zéro, une relation conséquence algébrique de (A).

Cela posé, *si sur une relation conforme on exécute des différentiations quelconques, on tombe sur une relation de même nature.*

Cette proposition est évidente dans le cas très-particulier où le second membre de la relation donnée ne contiendrait que les seules variables indépendantes.

Plaçons-nous actuellement dans le cas général, et supposons qu'on exécute sur la relation donnée une différentiation première se rapportant, par exemple, à la variable x. On voit tout d'abord que la relation résultante satisfait, comme la proposée, à la première des deux conditions formulées dans la définition ci-dessus: car, en désignant par γ la cote première (positive) commune aux diverses variables indépendantes, la cote première du premier membre a augmenté de γ, et la cote première maxima des inconnues ou dérivées figurant dans le second membre a augmenté aussi de γ. Je dis qu'elle satisfait aussi à la deuxième condition.

Soit en effet

$$(75) \qquad \partial = f(\ldots, \partial', \ldots)$$

la relation proposée, dans laquelle $\partial', \ldots$ désignent les diverses inconnues

ou dérivées qui ont la même cote première que δ. En différentiant la relation (75) par rapport à x, il vient

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = \ldots + \frac{\partial f}{\partial \delta'} \frac{\partial \delta'}{\partial x} + \ldots .$$

Les inconnues ou dérivées qui, dans le second membre de cette dernière relation, ont même cote première que $\frac{\partial \delta}{\partial x}$, sont $\frac{\partial \delta'}{\partial x}, \ldots$, et les dérivées premières du second membre, prises successivement par rapport aux quantités

$$\frac{\partial \delta'}{\partial x}, \ldots ,$$

sont respectivement

$$\frac{\partial f}{\partial \delta'}, \ldots .$$

Si la dérivée $\frac{\partial \delta'}{\partial x}$ est anormale par rapport à $\frac{\partial \delta}{\partial x}$, la quantité δ' l'est par rapport à δ, et comme la relation (75) est, par hypothèse, conforme, l'équation $\frac{\partial f}{\partial \delta'} = 0$ est conséquence algébrique de (A). D'ailleurs, en dehors des quantités $\frac{\partial \delta'}{\partial x}, \ldots$, aucune des inconnues ou dérivées figurant dans le second membre ne peut être anormale vis à vis de $\frac{\partial \delta}{\partial x}$, puisqu'elles ont une cote première inférieure.

On voit par là que la nature conforme de la relation (75) persiste après une première différentiation exécutée sur elle. En vertu du même raisonnement, appliqué à la relation résultante, elle persiste après une seconde, et ainsi de suite quel que soit le nombre des différentiations.

II. *Toutes les relations primitives du système S sont conformes.*

Car les relations qui font partie du système le sont évidemment, et par suite aussi (I) toutes celles qu'on en déduit par différentiations.

III. *En supposant, comme nous l'avons fait, que les relations* (A) *se trouvent numériquement vérifiées par les valeurs initiales des variables, des inconnues et des dérivées paramétriques qui y figurent, les relations primitives fournissent, sans incompatibilité, les valeurs initiales de toutes les dérivées principales, et, en conséquence, les développements par la formule de Taylor*

des intégrales hypothétiques répondant aux conditions initiales données peuvent être entièrement reconstruits.

En attribuant aux variables, aux inconnues et aux dérivées paramétriques les valeurs initiales données, on transforme, comme nous allons le voir, chaque second membre des relations primitives en une simple fonction des dérivées principales dont les classes sont inférieures à celle du premier membre correspondant. Effectivement, l'opération dont il s'agit transforme chaque second membre du système S en une simple quantité numérique. D'un autre côté, si, sur une relation du système S, on exécute une différentiation d'ordre quelconque, le second membre de la relation résultante a la forme linéaire par rapport aux dérivées dont la cote première est égale à celle du premier membre, et en particulier par rapport aux dérivées principales anormales; le coefficient d'une dérivée principale anormale n'est alors autre chose que la dérivée première du second membre, prise par rapport à la dérivée principale anormale dont il s'agit, et, comme la relation est conforme, ce coefficient ne peut manquer de s'annuler quand les relations (A) se trouvent numériquement vérifiées, et par suite quand on attribue aux variables, aux inconnues et aux dérivées paramétriques les valeurs initiales données.

Cela étant, donnons aux variables indépendantes $x, y, \ldots$ leurs valeurs initiales. Dans ces conditions, les intégrales hypothétiques et leurs dérivées de tous ordres prennent également leurs valeurs initiales, et, comme celles des intégrales et de leurs dérivées paramétriques sont supposées données, chaque relation primitive ne contient plus dans son second membre d'autres quantités inconnues que les valeurs initiales des dérivées principales de classes inférieures à son premier membre. Si donc on partage les relations primitives en groupes successifs d'après la classe croissante de leurs premiers membres, si d'autre part on observe que chaque dérivée principale figure une fois et une seule dans les premiers membres de ces relations, on voit que les relations primitives du premier groupe fourniront, sans incompatibilité, les valeurs initiales des dérivées principales de première classe; puis, ces dernières une fois connues, que les relations primitives du deuxième groupe fourniront, sans incompatibilité, les valeurs initiales des dérivées principales de deuxième classe; et ainsi de suite indéfiniment.

IV. *Les intégrales hypothétiques répondant aux conditions initiales données ne peuvent manquer d'exister effectivement, si leurs développements, construits a priori à partir des valeurs initiales choisies pour les variables, sont convergents.*

On raisonnera comme à l'alinéa III du n° 14.

En conséquence, tout revient à prouver la convergence de ces développements.

V, VI, VII, VIII et IX. Il suffit maintenant, pour achever la démonstration, de répéter textuellement les alinéas V, VI, VII, VIII et IX du n° 22, avec les quelques modifications qui s'y trouvent indiquées par voie d'annotations.

APPENDICE.

Je me propose de faire voir, dans cet Appendice:

1° que tous les types de systèmes différentiels complètement intégrables étudiés jusqu'à ce jour ne sont que des cas particuliers du type que j'appelle aujourd'hui *orthonome;*

2° que les résultats exposés par M. GOURSAT dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences du 2 novembre 1897 sont contenus, comme cas particulier, dans ceux que j'expose au n° 31 du présent Mémoire.

I. Je ferai observer tout d'abord que le mot *orthonome*, tel qu'il se trouve défini au n° 21, possède une signification plus large que dans mes travaux antérieurs. Dans les travaux en question, j'ai considéré en effet un type de système différentiel auquel j'ai donné d'abord le nom d'*harmonique* (Annales de l'Ecole Normale, 1893), puis d'*orthonome* (Recueil des savants étrangers, tome 32, n° 3), et je me propose actuellement d'établir qu'un pareil type rentre, comme cas particulier, dans celui que je qualifie aujourd'hui d'*orthonome*, et qui fait l'objet de la troisième partie du présent Mémoire.

Je rappellerai tout d'abord les définitions de ces systèmes.

Désignant par $x, y, \ldots$ les variables indépendantes, et par $u, v, \ldots$ les fonctions inconnues d'un système différentiel, faisons correspondre à chacune des quantités

$$x, y, \ldots, u, v, \ldots$$

p entiers positifs, nuls ou négatifs, que nous nommerons respectivement *cote première, cote seconde, ..., cote* $p^{\text{ième}}$ de cette quantité. Considérant ensuite une dérivée quelconque de l'une des fonctions inconnues, nommons *cote* $q^{\text{ième}}$ $(q = 1, 2, \ldots, p)$ de la dérivée en question l'entier obtenu en ajoutant à la cote $q^{\text{ième}}$ de la fonction inconnue les cotes $q^{\text{ièmes}}$ de toutes les variables de différentiation, distinctes ou non.

Supposons enfin que le système se trouve résolu par rapport à certaines dérivées, qui ne figurent, non plus que leurs propres dérivées, dans aucun des seconds membres, et que ces derniers, si l'on y considère pour un instant $x, y, \ldots, u, v, \ldots$, et les diverses dérivées de $u, v, \ldots$ qui y figurent, comme autant de variables indépendantes distinctes, soient tous développables dans un même domaine.

Cela étant:

A. *Définition des systèmes harmoniques (ou anciens systèmes orthonomes).*

Le système en question sera dit *harmonique,* s'il satisfait à la condition suivante:

Les diverses dérivées de $u, v, \ldots$ qui figurent *effectivement* dans le second membre d'une équation quelconque ont des ordres au plus égaux à celui du premier membre correspondant; de plus, en désignant par $c_1, c_2, \ldots, c_p$ les cotes du premier membre, et par $c'_1, c'_2, \ldots, c'_p$ les cotes d'une dérivée quelconque d'ordre égal figurant *effectivement* dans le second, les différences

$$c_1 - c'_1, c_2 - c'_2, \ldots, c_p - c'_p$$

ne sont pas toutes nulles, et la première d'entre elles qui ne s'évanouit pas est positive.

B. *Définition des nouveaux systèmes orthonomes.*

Le système en question sera dit *orthonome,* si les deux conditions suivantes se trouvent à la fois remplies:

1° Les cotes premières des diverses variables indépendantes sont toutes égales à un même entier positif.

2° Si, considérant une équation quelconque du système, on désigne par $c_1, c_2, \ldots, c_p$ les cotes du premier membre, par $c'_1, c'_2, \ldots, c'_p$ celles d'une dérivée figurant *effectivement* dans le second, et par $c''_1, c''_2, \ldots, c''_p$ celles d'une fonction inconnue y figurant aussi *effectivement*, les différences

$$c_1 - c'_1, c_2 - c'_2, \ldots, c_p - c'_p$$

ne sont pas toutes nulles, et la première d'entre elles qui ne s'évanouit pas est positive; la même chose a lieu pour les différences

$$c_1 - c''_1, c_2 - c''_2, \ldots, c_p - c''_p.$$

J'établirai enfin les propositions suivantes:

Tout système harmonique peut être considéré comme un système orthonome (nouvelle définition) où les cotes premières des diverses fonctions inconnues sont toutes égales entre elles.

Effectivement, étant donné un système harmonique, j'y affecte les diverses quantités $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ d'une cote supplémentaire, que je considère comme *antérieure* à toutes celles qu'implique la définition $\boldsymbol{A}$, et je choisis cette cote nouvelle égale à 1 pour les variables $x, y, \ldots$, à zéro pour les inconnues $u, v, \ldots$. Il résulte de là que, dans le système donné, chaque variable, chaque inconnue et chaque dérivée d'inconnue se trouve affectée de $p + 1$ cotes, et que la cote première d'une quantité quelconque se trouve être égale:

s'il s'agit d'une variable, à 1;

s'il s'agit d'une inconnue, à zéro;

s'il s'agit d'une dérivée d'inconnue, à l'ordre même de cette dérivée.

Cela étant, on voit sans peine que les deux conditions énoncées dans la définition $\boldsymbol{B}$ se trouvent nécessairement satisfaites.

Réciproquement, si, dans un système orthonome (nouvelle définition), les cotes premières des diverses inconnues sont toutes égales entre elles, le système dont il s'agit est harmonique.

On considérera chaque variable et chaque inconnue comme affectée

seulement des $p - 1$ dernières cotes qu'implique la définition $\boldsymbol{B}$, et l'on verra sans peine que la définition $\boldsymbol{A}$ se trouve satisfaite.

II. *Les systèmes harmoniques comprennent, comme cas particulier, ceux que j'ai nommés taxiques.*

Il suffit de rapprocher de l'alinéa précédent I l'exemple II du n° 21.

III. *Les systèmes harmoniques comprennent, comme cas particulier, les systèmes ci-dessous définis, que nous nommerons parataxiques.*

Désignant par $u, v, \ldots, w$ certaines fonctions inconnues des variables indépendantes $x, y, \ldots, s, t$, nous adopterons pour celles-ci un ordre déterminé, par exemple

(76) $$x, y, \ldots, s, t,$$

et de même pour les inconnues un ordre déterminé, par exemple

(77) $$u, v, \ldots, w.$$

Puis nous rangerons comme il suit, sur une ligne indéfinie allant de droite à gauche, les dérivées de tous ordres des diverses fonctions inconnues. Nous écrirons d'abord l'ensemble des dérivées premières, puis à gauche de celui-ci l'ensemble des dérivées secondes, puis à gauche de ce dernier l'ensemble des dérivées troisièmes, et ainsi de suite indéfiniment. En désignant maintenant par $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu$ les ordres partiels d'une dérivée quelconque relatifs à $x, y, \ldots, s, t$ respectivement, chacun des ensembles précédents sera divisé en ensembles partiels se succédant de gauche à droite d'après les valeurs décroissantes de l'ordre partiel α; chaque sous-ensemble en sous-ensembles partiels se succédant de gauche à droite d'après les valeurs décroissantes de l'ordre partiel β; et ainsi jusqu'à l'ordre partiel λ (inclusivement). Chacun des ensembles obtenus après une pareille suite d'opérations se compose évidemment de dérivées semblables appartenant respectivement aux fonctions $u, v, \ldots, w$: ces dérivées seront finalement écrites de gauche à droite dans l'ordre qui correspond à celui des fonctions. Les dérivées de tous ordres de nos fonctions inconnues se trouvent alors rangées, sur une ligne indéfinie allant de droite à gauche, dans un ordre bien déterminé. Nous quali-

fierons de *parataxique* la suite ainsi obtenue, et nous dirons qu'une dérivée de fonction inconnue est *antérieure* ou *postérieure* à une autre, suivant que, dans la suite parataxique, elle figure à gauche ou à droite de cette autre.

Cela étant, un système différentiel sera dit *parataxique*, s'il se trouve résolu par rapport à certaines dérivées, et si l'on peut trouver, pour les variables et les inconnues, deux ordres respectifs, (76), (77), tels, que chaque second membre ne contienne, outre les variables et les inconnues, que des dérivées paramétriques postérieures au premier membre correspondant.[1]

Or, un pareil système est nécessairement orthonome (nouvelle définition).

Effectivement, si une dérivée de fonction inconnue est antérieure à une autre, il arrive forcément de trois choses l'une:

ou bien elle est d'ordre supérieur à cette autre;

ou bien elle est du même ordre (total), mais, en désignant par

$$\alpha', \beta', \ldots, \lambda', \mu',$$
$$\alpha'', \beta'', \ldots, \lambda'', \mu''$$

les ordres partiels relatifs à

$$x, y, \ldots, s, t$$

de ces deux dérivées, les différences

$$(78) \qquad \alpha' - \alpha'', \beta' - \beta'', \ldots, \lambda' - \lambda''$$

ne sont pas toutes nulles, et la première d'entre elles qui ne s'évanouit pas est positive;

ou bien enfin les deux dérivées ont les mêmes ordres partiels respectifs, mais la fonction inconnue à laquelle appartient la première dérivée précède, dans la suite (77), la fonction inconnue à laquelle appartient la seconde.

Cela étant, et en désignant par h le nombre des variables indépendantes, il suffit, pour se convaincre de la nature orthonome d'un système parataxique, d'attribuer:

[1] Il va sans dire que les seconds membres sont supposés tous développables dans un même domaine.

aux variables des cotes premières toutes égales à 1, et aux inconnues des cotes premières toutes nulles;

aux variables et aux inconnues des cotes secondes toutes nulles, à l'exception de x qui aura pour cote seconde l'unité;

aux variables et aux inconnues des cotes troisièmes toutes nulles, à l'exception de y qui aura pour cote troisième l'unité;

etc.;

aux variables et aux inconnues des cotes $h^{\text{ièmes}}$ toutes nulles, à l'exception de l'avant-dernière variable s qui aura pour cote $h^{\text{ième}}$ l'unité;

finalement, aux variables des cotes $(h+1)^{\text{ièmes}}$ toutes nulles, et aux inconnues successives $u, v, \ldots, w$ des cotes $(h+1)^{\text{ièmes}}$ dont la valeur aille en décroissant.

Si l'on observe maintenant que, dans ce système orthonome, les cotes premières des inconnues sont toutes égales, il résulte de l'alinéa I que tout système parataxique est harmonique.

IV. *Les systèmes de Mme de Kowalevsky* (1875) *constituent un cas particulier des systèmes que j'appelle aujourd'hui orthonomes.*

Voir l'exemple I du n° 21.

V. *Les systèmes du premier ordre que M. Méray et moi avons étudiés en* 1890 *sous le nom de systèmes immédiats réguliers* (*ou semi-réguliers*), *constituent un cas particulier des systèmes harmoniques, et à plus forte raison* (I) *des systèmes que j'appelle aujourd'hui orthonomes.*

Effectivement, si l'on considère un système du premier ordre résolu par rapport à un certain nombre de dérivées, on peut, pour en disposer nettement les diverses équations, les écrire dans les cases d'un quadrillage rectangulaire dont les lignes correspondent aux variables indépendantes $x, y, \ldots$ et les colonnes aux fonctions inconnues $u, v, \ldots$, en plaçant l'équation qui aurait, par exemple, $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour premier membre, dans la case qui appartient en même temps à la ligne (x) et à la colonne (u).

Supposons maintenant que les lignes du tableau ainsi obtenu puissent être rangées dans un ordre tel, qu'en y faisant abstraction pour un instant des colonnes vides et des colonnes pleines, chacune des autres, par-

courue de bas en haut, soit formée par la succession d'un fragment vide et d'un fragment plein. Adoptons pour les lignes l'ordre dont il s'agit, et en même temps disposons les colonnes dans un ordre tel, que le nombre des cases vides n'augmente jamais d'une colonne à la suivante quand on lit le tableau de droite à gauche. Inversement alors il est clair: 1° qu'en faisant abstraction pour un instant des lignes vides et des lignes pleines, chacune des autres, parcourue de droite à gauche, est formée par la succession d'un fragment vide et d'un fragment plein; 2° que le nombre des cases vides n'augmente jamais d'une ligne à la suivante, quand on lit le tableau de bas en haut.

Cela étant, et après avoir donné à toutes les variables indépendantes la cote première 1, à toutes les fonctions inconnues la cote première zéro, distribuons les variables indépendantes en groupes successifs d'après les nombres décroissants de cases vides contenues dans les lignes correspondantes, et attribuons à chacune d'elles la cote seconde $1, 2, 3, \ldots$, suivant qu'elle appartient au premier, au second, au troisième ... groupe. Fixons pareillement la cote seconde de chaque fonction inconnue par la considération des nombres de cases vides contenues dans les diverses colonnes. On prouve alors bien aisément que *la cote seconde maxima des diverses dérivées figurant dans les seconds membres du système est inférieure à la cote seconde minima des diverses dérivées figurant dans les premiers.* Comme d'ailleurs les cotes premières de toutes les variables sont égales à 1, celles de toutes les inconnues égales à zéro, et celles de toutes les dérivées premières égales à 1, il est clair que le système proposé est orthonome (nouvelle définition), et de plus harmonique (I).

Cela étant, la simple définition des systèmes du premier ordre que M. Méray et moi avons étudiés en 1890 (Annales de l'Ecole Normale, 1890, p. 28, 29, 30, 44 et 45), montre qu'on peut les considérer comme un cas particulier fort restreint des systèmes harmoniques.

Comme je l'ai fait remarquer dans l'Introduction, et comme on peut aisément s'en assurer, ils comprennent à leur tour, comme cas particuliers, les formes du premier ordre étudiées par M. König et par les divers auteurs qui l'ont précédé.

VI. *Les systèmes canoniques de M. Bourlet* (1891) *constituent un cas particulier des systèmes parataxiques, à plus forte raison* (III) *des systèmes*

harmoniques, à plus forte raison enfin (I) *des systèmes que j'appelle aujourd'hui orthonomes.*

Leur définition (voir la Thèse de M. BOURLET, p. 27) revient en effet à la suivante:

Un système différentiel sera dit *canonique*, s'il est du premier ordre, linéaire par rapport aux dérivées des fonctions inconnues qu'il implique, résolu par rapport à un certain nombre de ces dérivées, et si de plus les lignes et les colonnes de son tableau peuvent être rangées dans un ordre tel, que le second membre de l'équation écrite dans une case pleine quelconque ne contienne, outre les variables indépendantes et les fonctions inconnues, que les dérivées premières correspondant, soit aux cases vides situées dans les lignes inférieures à celle de la case pleine considérée, soit aux cases vides situées à droite dans la même ligne.

D'après cette définition, les systèmes canoniques de M. BOURLET ne sont évidemment autre chose que des systèmes parataxiques et linéaires du premier ordre.

VII. *Les systèmes canoniques définis et étudiés par M. Delassus en* 1896 *constituent un cas particulier des systèmes taxiques, à plus forte raison* (II) *des systèmes que j'ai étudiés en* 1893 *sous le nom d'harmoniques, à plus forte raison enfin* (I) *des systèmes que j'appelle aujourd'hui orthonomes.*

Désignons par n l'ordre d'un système différentiel donné; rangeons les dérivées de tous ordres des fonctions inconnues $u, v, \ldots, w$ dans l'ordre taxique, comme il a été expliqué au n° 21 (exemple II); et ne considérons, dans cette suite indéfinie, que la portion limitée E contenant les dérivées des ordres $1, 2, \ldots, n$. Si l'on parcourt de gauche à droite cette suite limitée, il résulte des explications données au n° 21 que l'on rencontrera successivement:

l'ensemble $E_u^{(n)}$ des dérivées d'ordre n de u, l'ensemble $E_v^{(n)}$ des dérivées d'ordre n de $v, \ldots$, l'ensemble $E_w^{(n)}$ des dérivées d'ordre n de w;

l'ensemble $E_u^{(n-1)}$ des dérivées d'ordre $n-1$ de u, l'ensemble $E_v^{(n-1)}$ des dérivées d'ordre $n-1$ de $v, \ldots$, l'ensemble $E_w^{(n-1)}$ des dérivées d'ordre $n-1$ de w;

etc.;

finalement, l'ensemble $E_u^{(1)}$ des dérivées premières de u, l'ensemble

$E_v^{(1)}$ des dérivées premières de $v, \ldots$, l'ensemble $E_w^{(1)}$ des dérivées premières de w.

Cela posé, la définition donnée par M. Delassus de ses systèmes *canoniques* (voir les Annales de l'Ecole Normale, 1896, p. 440 et 441) revient à dire qu'un pareil système est résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues, et que, si l'on partage en groupes les équations du système, suivant que les premiers membres des équations dont il s'agit appartiennent à l'un ou à l'autre des ensembles partiels

$$\begin{array}{llll} E_u^{(n)}, & E_v^{(n)}, & \ldots, & E_w^{(n)}, \\ E_u^{(n-1)}, & E_v^{(n-1)}, & \ldots, & E_w^{(n-1)}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ E_u^{(1)}, & E_v^{(1)}, & \ldots, & E_w^{(1)}, \end{array}$$

chacun des groupes d'équations ainsi obtenus satisfait à la double condition suivante: 1° en désignant par j le nombre des équations qui composent un groupe quelconque, ces j équations se trouvent résolues par rapport aux j premières dérivées de l'ensemble partiel correspondant; 2° chaque équation du groupe considéré ne contient dans son second membre, outre les variables indépendantes et les inconnues, que des dérivées paramétriques postérieures, dans l'ensemble E, aux j premiers membres du groupe.

Les systèmes canoniques de M. Delassus sont donc évidemment taxiques.

VIII. *Les résultats exposés par M. Goursat dans les Comptes-Rendus de l'Académie des sciences du* 2 *novembre* 1897, *constituent un cas particulier de ceux que j'expose au n°* 31 *du présent Mémoire.*

Désignons en effet par u une fonction inconnue des deux variables indépendantes x et y, et considérons l'équation aux dérivées partielles

$$(79) \qquad \frac{\partial^n u}{\partial x^h \partial y^{n-h}} = F\Big(x, y, u, \partial, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial y^n}, \frac{\partial^n u}{\partial x \partial y^{n-1}}, \ldots \frac{\partial^n u}{\partial x^{h-1} \partial y^{n-h+1}}, \frac{\partial^n u}{\partial x^{h+1} \partial y^{n-h-1}}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\Big),$$

dans le second membre de laquelle $\partial, \ldots$ désignent toutes les dérivées de u des ordres $1, 2, \ldots, n-1$. Si l'on attribue à x, y, u les cotes premières respectives $1, 1, 0$ et les cotes secondes respectives $c_x, c_y, 0$, avec la condition $c_x \gtrless c_y$, les quantités $u, \partial, \ldots$ seront toutes normales vis à vis du premier membre de l'équation (79), comme ayant une cote première inférieure; quant à la quantité

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^i \partial y^{n-i}},$$

qui a même cote première que le premier membre, elle sera normale ou non vis à vis de lui, selon que la différence

$$[hc_x + (n-h)c_y] - [ic_x + (n-i)c_y] = (h-i)(c_x - c_y)$$

sera ou non positive; en supposant, pour fixer les idées, $c_x > c_y$, on voit donc que les quantités

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n}, \frac{\partial^n u}{\partial x \partial y^{n-1}}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^{h-1} \partial y^{n-h+1}}$$

sont normales vis à vis du premier membre $\frac{\partial^n u}{\partial x^h \partial y^{n-h}}$, mais que les quantités

(80) $$\frac{\partial^n u}{\partial x^{h+1} \partial y^{n-h-1}}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}$$

ne le sont pas, sans toutefois que leur cote première surpasse celle du premier membre dont il s'agit.

L'application à ce cas particulier de notre proposition du n° 31 fournit alors le résultat suivant, dans lequel on reconnaîtra sans peine celui qu'a récemment formulé M. GOURSAT:

Si l'on désigne par (A) *le groupe des équations obtenues en égalant à zéro les dérivées premières du second membre de l'équation* (79) *par rapport aux quantités* (80), *et si l'on impose à une intégrale hypothétique de* (79) *des conditions initiales arbitrairement choisies sous la seule restriction que les équations* (A) *se trouvent numériquement vérifiées par les valeurs initiales des quantités qu'elles contiennent, l'intégrale dont il s'agit ne peut manquer d'exister effectivement.*

SUR UNE CLASSE DE TRANSCENDANTES NOUVELLES

(Second mémoire)

PAR

EMILE PICARD

À PARIS.

Dans mon mémoire[1] *Sur une classe de transcendantes nouvelles,* j'ai démontré l'existence de systèmes de m fonctions uniformes dans tout le plan admettant la période $\omega' i$ et jouissant relativement à la substitution $(z, z+\omega)$ de la propriété suivante. Considérons une transformation *birationnelle* entre m lettres $u, v, \ldots, w$,

$$(1) \qquad \begin{aligned} u' &= R_1(u, v, \ldots, w), \\ v' &= R_2(u, v, \ldots, w), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w' &= R_m(u, v, \ldots, w), \end{aligned}$$

et désignons par $f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)$ les m fonctions; on a

$$(\mathrm{E}) \qquad \begin{aligned} f(z+\omega) &= R_1[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)], \\ \varphi(z+\omega) &= R_2[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)], \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \psi(z+\omega) &= R_m(f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)]. \end{aligned}$$

Il importe de rappeler les hypothèses d'un caractère très général faites

[1] Acta mathematica (tome 18); on est prié de se reporter aux notations de ce mémoire.

dans le mémoire cité sur la substitution (1). Nous avons supposé que $u = v = \ldots = w = 0$ est un point double de cette transformation birationnelle, et que l'on a dans le voisinage de ces valeurs les développements en séries entières

$$(2)\qquad \begin{aligned} u' &= \mu_1 u + Q_1(u, v, \ldots, w), \\ v' &= \mu_2 v + Q_2(u, v, \ldots, w), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w' &= \mu_m w + Q_m(u, v, \ldots, w), \end{aligned}$$

les fonctions Q ne contenant que des termes de degré supérieur à *un*. Nous avons supposé de plus que l'on n'a pas d'égalité de la forme

$$(3)\qquad \mu_i = e^{\frac{2\nu\pi\omega}{\omega'}},$$

i étant un des nombres $1, 2, \ldots, m$, et ν un entier positif ou négatif, et que l'on n'a pas non plus

$$(4)\qquad m = e^{\frac{2\nu\pi\omega}{\omega'}}.$$

Ces restrictions *d'inégalités*, correspondant à (3) et (4), peuvent être levées. Je le montrerai tout à l'heure, mais je veux tout d'abord montrer comment les résultats de mon premier mémoire auraient pu être obtenus un peu plus rapidement, en restant toujours d'ailleurs dans le même ordre d'idées. J'ai commencé (loc. cit.) par examiner le cas où les R étaient des polynomes (la substitution n'étant pas alors birationnelle), et le cas général a été ramené à ce cas particulier. Or on peut procéder *directement* en gardant le même mode de démonstration. Nous opérerons comme au par. 4, en prenant comme première approximation des fonctions doublement périodiques de seconde espèce

$$f_0(z), \varphi_0(z), \ldots, \psi_0(z)$$

admettant la période $\omega' i$, et ayant les multiplicateurs respectifs $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ pour le changement de z en $z + \omega$. On suppose que ces fonctions sont holomorphes dans la bande ii', et que dans cette même bande leurs modules sont suffisamment petits. On a d'abord le système

$$(5) \qquad \begin{aligned} f_1(z+\omega) &= \mu_1 f_1(z) + Q_1[f_0(z), \varphi_0(z), \ldots, \psi_0(z)], \\ \varphi_1(z+\omega) &= \mu_2 \varphi_1(z) + Q_2[f_0(z), \varphi_0(z), \ldots, \psi_0(z)], \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_1(z+\omega) &= \mu_m \psi_1(z) + Q_m[f_0(z), \varphi_0(z), \ldots, \psi_0(z)]. \end{aligned}$$

Il détermine des fonctions $f_1(z), \varphi_1(z), \ldots, \psi_1(z)$ ayant dans la première bande les mêmes singularités (pôles) que $f_0(z), \varphi_0(z), \ldots, \psi_0(z)$. On le voit de la manière la plus simple, en posant

$$\begin{aligned} f_1(z) &= f_0(z) + F_1(z), \\ & \ldots\ldots\ldots \\ \psi_1(z) &= \psi_0(z) + \Psi_1(z). \end{aligned}$$

En se servant alors du théorème du par. 9, on est assuré que l'on peut déterminer des fonctions $F_1, \ldots, \Psi_1$ holomorphes dans la bande yy', AA' et un peu à droite et à gauche. On continue alors en faisant successivement les approximations indiquées au par. 4. La seule différence avec la théorie développée aux par. 4 et suivants, est que dans ces paragraphes les Q représentaient des polynomes, tandis qu'ici ce sont des séries convergentes seulement si les variables qui y figurent sont suffisamment petites. Mais il n'y a pas là de véritable difficulté, car on a à considérer seulement les fonctions Q quand la variable z est dans la bande ii', et si dans cette bande les modules de $f_0, \varphi_0, \ldots, \psi_0$ sont suffisamment petits, le lemme du par. 3 et les raisonnements du par. 5 subsistent entièrement.

Nous pouvons donc conclure à l'existence de fonctions uniformes

$$f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)$$

satisfaisant aux équations (E). Notre mode de raisonnement prouve que l'on peut avoir une solution de ces équations fonctionnelles pour laquelle les fonctions $f, \varphi, \ldots, \psi$ deviendront infinies dans la bande (yy', AA') comme des fonctions données doublement périodiques de seconde espèce

$$f_0(z), \varphi_0(z), \ldots, \psi_0(z),$$

pourvu que ces fonctions aient des modules assez petits dans la bande ii'.

Ce serait une question intéressante de rechercher *toutes* les solutions possibles uniformes et périodiques des équations (E). Celles que j'ai obtenues sont vraisemblablement très particulières, malgré le caractère de généralité qu'elles paraissent présenter; la théorie des systèmes d'équations en nombre infini pourra peut-être trouver d'importantes applications dans des problèmes de ce genre, quand elle sera plus développée.

Je n'aborde pas, au moins pour le moment, ces difficiles problèmes. C'est la restriction relative aux coefficients μ que je veux approfondir maintenant. Le résultat obtenu suppose que l'on n'a pas d'égalité de la forme

$$(\alpha) \qquad \mu_i = e^{\frac{2\nu\pi\omega}{\omega'}}$$

i étant un des nombres $1, 2, \ldots, m$, et ν un entier positif ou négatif. Avec le mode de démonstration que je viens d'employer ici, l'impossibilité de la relation (4) ne joue plus de rôle. Nous allons montrer que, même dans le cas, où il existe une relation de la forme (α), on peut trouver des transcendantes uniformes satisfaisant aux conditions indiquées.

La difficulté, au premier abord, parait sérieuse, car les approximations successives ne peuvent plus être effectuées quand on a une relation de la forme (α). On peut cependant lever la difficulté de la manière suivante. Soit $\lambda(z)$ une fonction doublement périodique de seconde espèce aux multiplicateurs 1 et a (en désignant par a une constante quelconque), telle par conséquent que

$$\lambda(z + \omega' i) = \lambda(z), \qquad \lambda(z + \omega) = a\lambda(z)$$

et supposons que $\lambda(z)$ reste holomorphe dans la bande ii'. Posons

$$f(z) = \lambda(z) \,.\, F(z), \qquad \varphi(z) = \lambda(z) \,.\, \Phi(z) \;, \quad \ldots \quad \psi(z) = \lambda(z) \,.\, \Psi(z).$$

On aura

$$F(z + \omega) = \frac{\mu_1}{a} F(z) + P_1(F(z) \,,\, \Phi(z) \,, \ldots ,\, \Psi(z) \,,\, \lambda(z)),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Psi(z + \omega) = \frac{\mu_m}{a} \Psi(z) + P_m(F(z) \,,\, \Phi(z), \ldots ,\, \Psi(z) \,,\, \lambda(z)),$$

les P étant des séries en $F, \Phi, \ldots, \Psi$ commençant par des termes du

second degré, et dont les coefficients dépendent d'ailleurs de $\lambda(z)$. Ces équations sont de même forme que les équations (5), sauf que $\lambda(z)$ y figure, ce qui n'est d'aucune importance pour l'emploi des approximations successives. Mais les multiplicateurs $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ ont été remplacés par

$$\frac{\mu_1}{a}, \frac{\mu_2}{a}, \ldots, \frac{\mu_m}{a}$$

et comme a peut être pris arbitrairement, il n'y a plus de multiplicateur singulier. La difficulté signalée a donc disparu. Si donc aucun des multiplicateurs μ n'est nul, *il y aura certainement des transcendantes uniformes dans tout le plan, avec des discontinuités uniquement polaires, admettant la période $\omega' i$ et satisfaisant aux conditions* (E).

ÜBER EINE NEUE THEORIE DER ALGEBRAISCHEN FUNCTIONEN ZWEIER VARIABLEN

VON

K. HENSEL
in BERLIN.

§ 1. *Einleitung. Ziel der Untersuchung.*

Die Theorie der algebraischen Functionen von zwei Variablen, oder die Lehre von den algebraischen Oberflächen und Raumcurven ist seit ihrer Begründung durch CLEBSCH und NÖTHER bisher wesentlich nach der mehr geometrischen Richtung ausgebildet worden, welche bei der Untersuchung der ebenen algebraischen Curven zu so schönen Erfolgen geführt hatte. Dagegen ist sie bis jetzt noch nicht mit den Methoden der reinen Analysis behandelt worden, wie dies für die algebraischen Functionen einer Veränderlichen zuerst durch CAUCHY und PUISEUX, später in weiterem Umfange durch RIEMANN und WEIERSTRASS geschehen ist.

Ich möchte in dieser Abhandlung die Grundlagen einer Theorie auseinandersetzen, welche wohl als directe Verallgemeinerung der Weierstrass'schen Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen auf Functionen von zwei und beliebig vielen Variablen angesehen werden kann. Mein Ziel ist, zu zeigen, dass und wie der gesammte Wertvorrath einer n-wertigen algebraischen Function von zwei Variabeln stetig, d. h. in n Zweigen ausgebreitet werden kann, und in welcher Weise diese n Zweige unter einander zusammenhängen.

Ich zeige zunächst, worin der wesentliche Unterschied zwischen den algebraischen Functionen von einer und von zwei Variablen besteht, und in welcher Form die soeben characterisirte Aufgabe in jener höheren Theorie ausgesprochen werden muss.

In der Theorie der algebraischen Functionen einer Variabeln ist die Erkenntniss der analytischen Eigenschaften der Wurzeln einer algebraischen Gleichung $f(y, x) = 0$ dann vollkommen gegeben, wenn man die Verzweigung der zugehörigen n-blättrigen Riemann'schen Kugelfläche d. h. diejenigen Stellen $x = \alpha$ der unabhängigen Variabeln kennt, bei deren Umkreisung zwei oder mehrere unter den n conjugirten Zweigen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ von y in einander übergehen. Die Bestimmung jener n Zweige für eine reguläre oder eine singuläre Stelle $x = \alpha$, die Aufsuchung der Verzweigungspunkte und das Studium der Zusammenhanges jener Zweige in der Umgebung derselben bildet die Fundamentalaufgabe jener Theorie. Sie kann mit den Methoden der Functionentheorie vollständig gelöst werden, da diese die Entwicklung einer solchen Function für jede Stelle $x = \alpha$ nach ganzen, oder, für die Verzweigungspunkte, nach gebrochenen Potenzen von $x - \alpha$ finden lassen, und da die Veränderung einer solchen Potenzreihe beim Umlauf um die Stelle $x = \alpha$ aus ihrer Form unmittelbar hervorgeht.

Das analytische Verhalten der Functionen von zwei Variablen ist nun ein wesentlich anderes, und erfordert zu seiner Erkenntniss eine vollständig andere Untersuchungsmethode. Ich zeige zunächst, worin der Unterschied jener beiden Theorieen besteht:

Es sei

$$(1) \qquad f(z, xy) = A_n(xy)z^n + A_{n-1}(xy)z^{n-1} + \ldots + A_0(xy) = 0$$

eine irreductible Gleichung n^{ten} Grades in z mit ganzen rationalen Functionen von x und y als Coefficienten. Fixirt man nun in der xy-Ebene einen im Endlichen liegenden Punkt $\mathfrak{P}_0$ $(x = \alpha_1^{(0)},\ y = \beta_1^{(0)})$ so, dass die n zugehörigen Werthe $\gamma_1^{(0)}, \gamma_2^{(0)}, \ldots, \gamma_n^{(0)}$ von z, also die n Wurzeln der Zahlengleichung $f(z, \alpha_1^{(0)}\beta_1^{(0)})$ alle endlich und von einander verschieden sind, so kann man für jeden Nachbarpunkt $\mathfrak{P}$ $(x = \alpha,\ y = \beta)$ die zugehörigen Werthe $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ von z stets so bezeichnen, dass sie mit den Anfangswerthen $\gamma_i^{(0)}$ nach der Stetigkeit zusammenhängen, dass also allgemein γ_i in $\gamma_i^{(0)}$ übergeht, wenn $\mathfrak{P}$ auf dem kürzesten Wege zu $\mathfrak{P}_0$ hingeführt wird. Lässt man nun den Punkt $\mathfrak{P}$ continuirlich weiter und weiter auf der ganzen xy-Ebene fortrücken, so kann man den gesammten Werthvorrath der n-werthigen Function z in n stetig zusammenhängende Reihen ausbreiten, ohne jemals über die Numerirung der n Wurzeln in

Zweifel zu gerathen; nur muss man, genau, wie bei den Functionen einer Variabeln die *critischen Punkte*, nämlich alle diejenigen Stellen $\mathfrak{P}$ ausschalten, für welche eine der n Wurzeln $\bar{\gamma}$ unendlich gross ist, oder wo zwei unter ihnen einander gleich werden.

Während nun jene critischen Punkte bei den algebraischen Curven nur in endlicher Anzahl auftreten, bilden sie hier ein System algebraischer Curven. In der That wird ja für alle die und nur die im Endlichen liegenden Punkte $\mathfrak{P}$ eine der n Wurzeln unendlich gross, für welche der Coefficient von z^n in (1) gleich Null wird, und die Gleichungsdiscriminante $D(x, y)$ von (1) verschwindet für alle diejenigen endlichen Punkte (α, β) denen mindestens zwei gleiche Wurzeln γ entsprechen. Durch die Gleichungen:

$$(2) \qquad A_n(x, y) = 0, \qquad D(x, y) = 0$$

sind also alle critischen Punkte im Endlichen vollständig definirt; zu ihnen können noch die beiden unendlich fernen Geraden:

$$(2') \qquad \frac{1}{x} = 0, \qquad \frac{1}{y} = 0$$

hinzutreten, deren sämmtliche Punkte im Unendlichen liegen; die critischen Punkte treten hier also nicht vereinzelt auf, sondern es existirt eine endliche Anzahl irreductibler Curven, deren sämmtliche Punkte für die Functionen z critisch sind; man findet ihre Gleichungen, indem man die irreductiblen Factoren von $A_n(x, y)$ und von $D(x, y)$ einzeln gleich Null setzt.

Während also die algebraischen Functionen einer Variabeln in der Umgebung eines *einzelnen* regulären oder critischen Punktes darzustellen sind, bietet sich hier die allgemeinere Aufgabe,

> die algebraische Function z soll in der Umgebung desjenigen Zweiges l_0 einer regulären oder einer critischen Curve P betrachtet werden, welcher durch einen beliebig gegebenen Punkt $\mathfrak{P}_0 = (\alpha_0, \beta_0)$ hindurchgeht.

Es sei also P die gegebene irreductible Curve in deren Umgebung die Function z untersucht werden soll,

$$P(y, x) = y^\mu + p_{\mu-1}(x)y^{\mu-1} + \dots + p_0(x) = 0$$

sei ihre Gleichung, und es werde der Punkt $\mathfrak{P}_0$ der Einfachheit wegen vorläufig im Endlichen angenommenen. Dann kann der durch $\mathfrak{P}_0$ hindurchgehende Zweig l_0 von (P) in der Umgebung von $\mathfrak{P}_0$ stets durch eine Gleichung

$$y = y_0(x \mid \alpha_0) = \beta_0 + \beta_1(x - \alpha_0)^{\frac{1}{a}} + \beta_2(x - \alpha_0)^{\frac{2}{a}} + \dots$$

dargestellt werden, wo y_0 eine bestimmte algebraische Potenzreihe bedeutet, die nach ganzen Potenzen von $(x - \alpha_0)^{\frac{1}{a}}$ fortschreitet, wenn, was wir im Folgenden stets voraussetzen wollen, der Punkt $\mathfrak{P}_0$ ein Verzweigungspunkt von einer beliebigen $(a - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung der Curve P ist.[1] Dann kann die hier sich darbietende Fundamentalaufgabe so ausgesprochen werden: Die Wurzeln $z_1, z_2, \dots, z_n$ der Gleichung (1) sollen in einer endlichen Umgebung des Zweiges l_0 durch Reihen dargestellt werden, welche hier gleichmässig convergiren.

Diese Aufgabe kann nun so umgeformt werden, dass sie der entsprechenden für Functionen einer Variablen ganz analog ist; führt man nämlich statt x und y die neuen Variablen ξ und η durch die Gleichungen

$$\xi = (x - \alpha_0)^{\frac{1}{a}}, \qquad \eta = y - y_0(x \mid \alpha_0)$$

ein, so geht die Gleichung für z über in:

$$\bar{f}(z;\eta) = \bar{A}_n(\eta)z^n + \bar{A}_{n-1}(\eta)z^{n-1} + \dots + \bar{A}_0(\eta) = 0,$$

wo die Grössen $\bar{A}_i(\eta)$ jetzt ebenfalls ganze rationale Functionen von η

---

[1] Liegt der Zweig im Unendlichen, und ist etwa $\alpha_0 = \infty$ so ist in der Reihe $y_0(x \mid \alpha_0)$ und in der Gleichung (1) an Stelle von $x - \alpha_0$ die neue Variable $x' = \frac{1}{x}$ einzuführen, ist $\beta_0 = \infty$ ist also

$$y = \frac{\beta_{-h}}{(x - \alpha_0)^{\frac{h}{a}}} + \frac{\beta_{-(h-1)}}{(x - \alpha_0)^{\frac{h-1}{a}}} + \dots$$

die Darstellung der Zweiges l_0 so ist für y die Variable

$$y' = \frac{1}{y} = \beta'_h(x - \alpha_0)^{\frac{h}{a}} + \beta'_{h+1}(x - \alpha_0)^{\frac{h-1}{a}} + \dots$$

einzuführen, die Resultate bleiben also wörtlich bestehen.

sind; aber ihre Coefficienten sind nicht mehr ganze *rationale* Functionen von ξ sondern algebraische Potenzreihen, welche nach ganzen Potenzen von ξ fortschreiten und in einer endlichen Umgebung der Stelle $\xi = 0$ gleichmässig convergiren.

Für einen jeden speciellen *constanten* Werth ξ_0 von ξ innerhalb des gemeinsamen Convergenzbereiches aller jener Reihen kann also die n-wertige Function nach den Sätzen von Puiseux in n Reihen entwickelt werden, welche nach ganzen oder nach gebrochenen Potenzen von

$$\eta = (y - y_0)$$

mit constanten Coefficienten fortschreitet, und die n Wurzeln unserer Gleichung in einer endlichen Umgebung jener Stelle darstellen; lässt man aber ξ andere und andere constante Werthe $\xi_0, \xi_0', \ldots$ annehmen, so könnte man jedesmal vollständig andere Potenzreihen für z erhalten, welche nur innerhalb des gemeinsamen Convergenzbereiches mit einander coincidirten.

Ich werde aber in dieser Arbeit zeigen, dass die n Wurzeln $z_1, \ldots z_n$ in der Umgebung der Stelle $(\xi = 0,\ \eta = 0)$ oder von $(x = \alpha, y = y_0(x \mid \alpha))$ sämmtlich in Reihen von der Form entwickelt werden können:

$$e_0(\xi) + e_1(\xi)\eta^{\frac{1}{b}} + e_2(\xi)\eta^{\frac{2}{b}} + \ldots, \tag{3}$$

welche nach ganzen oder nach gebrochenen Potenzen von $\eta = (y - y_0)$ fortschreiten; ihre Coefficienten sind algebraische Potenzreihen von $\xi = (x - \alpha_0)^{\frac{1}{a}}$; diese Reihen convergiren als Functionen von ξ *und* von η betrachtet innerhalb einer endlichen Umgebung der Stelle $(\xi = \eta = 0)$ und stellen für jedes Werthsystem $(\xi = \xi_0, \eta = \eta_0)$ innerhalb desselben die n Gleichungswurzeln dar.

Dieses Resultat kann nicht durch die Methoden hergeleitet werden, durch welche Cauchy und Puiseux dieses Problem für Functionen einer Veränderlichen in so allgemeiner Weise gelöst haben, noch weniger kann man mit ihnen den analytischen Character der Coefficienten $e_i(\xi)$ für den ganzen Bereich der Variablen ξ oder x erkennen.

Ich benutze vielmehr zur Lösung dieser Aufgabe ein neues rein arithmetisches Verfahren, welches successive die einzelnen Coefficienten

$e_i(\xi)$ eines Zweiges zu bestimmen lehrt, und aus dem dann die Convergenz jener Reihe (3) und der analytische Character ihrer Coefficienten leicht erschlossen werden kann. Ich bemerke dabei, dass dieses Verfahren auch für die Untersuchung der algebraischen Functionen von beliebig vielen Veränderlichen benutzt werden kann, wie ich in einer späteren Abhandlung zeigen werde.

Die hier auseinandergesetzten Methoden und Resultate bildeten den ersten Theil einer Vorlesung, die ich im Wintersemester 1898—99, an der Berliner Universität gehalten habe; bei der Redaction jener Vorlesung für den Druck hat mich einer meiner Zuhörer Herr F. Hartogs in dankenswerthester Weise unterstützt.

Zuerst soll die hier für die *algebraischen* Function gestellte Aufgabe zunächst für die rationalen Functionen zweier Variablen gelöst werden, da sich in diesem einfachsten Falle besonders deutlich zeigen lässt, wie man durch die Natur des behandelten Problemes gerade auf die hier gewählte Fragestellung geführt wird, und da die hier gefundenen Resultate bei der Lösung des allgemeinen Problemes benutzt werden.

§ 2. *Die rationalen Functionen von zwei Variabeln; ihre Zerlegung in Linearfactoren.*

Wir betrachten zunächst die Gesammtheit aller rationalen Functionen von x und y und untersuchen sie in der Umgebung einer beliebigen Stelle $x = \alpha$ der Variabeln x, welche im Endlichen liegen oder aber auch die unendlich ferne Stelle sein kann. Eine jede solche Function kann in der Form dargestellt werden:

$$(1) \qquad f(x, y) = \frac{g(x, y)}{h(x, y)} = \frac{\bar{a}_0(x) + \bar{a}_1(x)y + \ldots + \bar{a}_m(x)y^m}{\bar{b}_0(x) + \bar{b}_1(x)y + \ldots + \bar{b}_n(x)y^n},$$

wo alle Coefficienten $\bar{a}_i(x)$ und $\bar{b}_k(x)$ als ganze Functionen von x vorausgesetzt werden können welche nicht alle eine und dieselbe ganze Function von x als gemeinsamen Theiler enthalten. In der Umgebung der endlichen Stelle $x = \alpha$ können dann alle nach positiven ganzen Potenzen des zugehörigen Linearfactors $x - \alpha$ entwickelt werden, welche in einer endlichen Umgebung jener Stelle gleichmässig convergiren, und dasselbe

ist für $\alpha = \infty$ der Fall, wenn man, was in der Folge stets geschehen soll, $x - \alpha$ dann durch $\frac{1}{x}$ ersetzt. Denkt man sich alle Coefficienten in dieser Weise entwickelt, und die niedrigste allen gemeinsame Potenz im Zähler und Nenner herausgezogen, so kann jede solche Function folgendermassen geschrieben werden:

$$(2) \qquad f(x, y) = (x - \alpha)^r \cdot \frac{a_0(x \mid \alpha) + a_1(x \mid \alpha)y + \ldots + a_m(x \mid \alpha)y^m}{b_0(x \mid \alpha) + b_1(x \mid \alpha)y + \ldots + b_n(x \mid \alpha)y^n},$$

wo jetzt die Coefficienten $a_i(x \mid \alpha)$, $b_k(x \mid \alpha)$, wie stets im Folgenden, Potenzreihen von $x - \alpha$ bedeuten sollen, welche in einer endlichen Umgebung der Stelle $x = \alpha$ gleichmässig convergieren; dieselben enthalten hier keine negativen Potenzen von $x - \alpha$, und für $x = \alpha$ verschwinden weder alle Coefficienten im Zähler noch auch diejenigen im Nenner.

Nur für eine endliche Anzahl von Stellen $x = \alpha$ tritt in (2) eine positive oder negative Potenz des zugehörigen Linearfactors vor jenen Bruch, im Allgemeinen ist $r = 0$; hierzu muss nämlich für ein endliches α der zugehörige Linearfactor in dem Ausdrucke (1) von $f(x, y)$ in allen Coefficienten des Zählers oder in allen Coefficienten der Nenners als Theiler enthalten sein. Ist dagegen $\alpha = \infty$ und ist der Zähler und der Nenner von $f(x, y)$ in (1) in Bezug auf x bzw. vom μ^{ten} und vom ν^{ten} Grade, so ergiebt sich ohne Weiteres, dass alsdann in der Darstellung (2) in der Umgebung jener Stelle die Potenz $\left(\frac{1}{x}\right)^{\nu-\mu}$ des bezüglichen Linearfactors vor dem Bruche auftritt.

Nunmehr kann man in jener Darstellung (2) auf der rechten Seite Zähler und Nenner in ihre Linearfactoren zerlegen, und man erhält so die folgende Darstellung:

$$(3) \qquad f(x, y) = (x - \alpha)^r \cdot \frac{(y - y_1)(y - y_2) \ldots (y - y_m) a_m(x \mid \alpha)}{(y - y_1')(y - y_2') \ldots (y - y_n') b_n(x \mid \alpha)}.$$

Hier sind $y_1 \ldots y_m$; $y_1' \ldots y_n'$ die Zweige, welche der Zähler $g(x, y)$ und der Nenner $h(x, y)$ in der Umgebung der Stelle $(x = \alpha)$ besitzen, sie sind also ebenfalls Potenzreihen, welche nach ganzen oder nach gebrochenen Potenzen des Linearfactors $(x - \alpha)$ fortschreiten, und welche alle innerhalb einer endlichen Umgebung jener Stelle gleichmässig convergiren;

falls eine oder mehrere jener Reihen mit einer negativen Potenz von $x - \alpha$ beginnen, also für $x = \alpha$ unendlich gross werden, so ist jener endliche Convergenzbereich oder jene Umgebung der Stelle $x = \alpha$ nach innen durch einen beliebig klein zu wählenden Kreis begrenzt, und in dieser Weise soll die Umgebung einer Stelle, falls dies nötig sein sollte, stets begrenzt vorausgesetzt werden. Auch hier können und wollen wir den Bruch $f(x, y) = \frac{g(x, y)}{h(x, y)}$ als in seiner reducirten Form, d. h. so gegeben voraussetzen, dass Zähler und Nenner als Function von y keinen gemeinsamen Theiler besitzen; alsdann sind die Linearfactoren $y - y_i$ im Zähler von den Factoren $y - y'_k$ im Nenner verschieden; dagegen kann natürlich einer der Linearfactoren im Zähler oder im Nenner noch mehrfach auftreten. Um dieses Vorkommen mehrfacher Linearfactoren im Zähler oder im Nenner von $f(x, y)$ einheitlich characterisiren zu können sagen wir genau wie bei den rationalen Functionen einer Variablen, $f(y, x)$ besitzt in Bezug auf einen Linearfactor $y - y_0$ die positive oder negative Ordnungszahl $\pm\sigma$ wenn derselbe σ Male im Zähler oder im Nenner jener Function vorkommt, und diese Function hat die Ordnungszahl Null, wenn $y - y_0$ weder im Zähler noch im Nenner auftritt.

Zu diesen Linearfactoren $y - y_i$ und $y - y'_k$ kann endlich als letzter noch der Factor $y - \infty$ oder $\frac{1}{y}$ treten, welcher für jede beliebige Stelle $x = \alpha$ dann und nur dann verschwindet wenn $\frac{1}{y} = 0$ also $y = \infty$ ist. Bringt man die zu untersuchende Function $f(x, y)$ in (1) auf die Form:

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{y}\right)^{n-m} \cdot \frac{\bar{a}_m(x) + \bar{a}_{m-1}(x)\frac{1}{y} + \ldots + \bar{a}_0(x)\left(\frac{1}{y}\right)^m}{\bar{b}_n(x) + \bar{b}_{n-1}(x)\frac{1}{y} + \ldots + \bar{b}_0(x)\left(\frac{1}{y}\right)^n},$$

so erkennt man, da sich im Zähler und Nenner für $y = \infty$ alle Glieder mit Ausnahme der ersten auf Null reduciren, dass $f(x, y)$ in Bezug auf den Linearfactor $\frac{1}{y}$ die Ordnungszahl $(n - m)$ besitzt, dass also die Ordnungszahl von $f(x, y)$ in Bezug auf den Linearfacter $\frac{1}{y}$ stets gleich dem negativ genommenen Grade $(m - n)$ jener rationalen Function für y ist.

Beachtet man endlich, dass die Summe der Ordnungszahlen für alle gleichen oder verschiedenen Linearfactoren im Zähler bzw. im Nenner gleich m bzw. gleich $(-n)$ ferner für den Linearfactor $\frac{1}{y}$ gleich $(n-m)$, und endlich für jeden anderen Linearfactor $y - y_0$ gleich Null ist, so ergiebt sich auch für die rationalen Functionen von zwei Variabeln der wichtige Satz:

> Die Summe der Ordnungszahlen einer beliebigen rationalen Function $f(y, x)$ für alle Linearfactoren $y - y_0$ in der Umgebung einer beliebigen Stelle $x = \alpha$ ist stets gleich Null, d. h. eine jede solche Function besitzt ebensoviele Nullcurven wie Polcurven.

Besitzt also eine Function $f(y, x)$ überhaupt keinen Linearfactor $y - y_0$ in negativer Ordnung, so muss sie nothwendig von y unabhängig, also eine rationale Function von x allein sein, denn sie enthält nach dem obigen Satze auch keinen Linearfactor in positiver Ordnung.

Geometrisch stellen die Gleichungen:

$$y - y_i = 0, \qquad y - y'_k = 0 \qquad \left(\begin{smallmatrix} i=1,2,\ldots,m \\ k=1,2,\ldots,n \end{smallmatrix}\right)$$

die einzelnen Zweige der Zählercurve $g(y, x) = 0$ und der Nennercurve $h(y, x) = 0$ von der Function $f(y, x)$ in der Umgebung der Stelle $x = \alpha$ dar; sie können und sollen daher, wie dies oben bereits geschehen ist, auch mitunter als Nullcurven oder Polcurven bezeichnet werden. Zu ihnen kann dann noch die unendlich ferne Gerade $\frac{1}{y} = 0$ und ausserdem an einer endlichen Anzahl von Stellen $x = \alpha$ die zugehörige Gerade $x - \alpha = 0$, als ein- oder mehrfache Nullcurve oder Polcurve hinzutreten.

§ 3. *Die Entwickelung der rationalen Functionen in Potenzreihen.*

In der Theorie der analytischen Functionen einer Variablen wird gezeigt, dass man jede rationale Function $f(x)$ in einer endlichen Umgebung einer beliebigen Stelle $(x = \alpha)$ in eine nach ganzen Potenzen des zugehörigen Linearfactors fortschreitende gleichmässig convergente Potenzreihe entwickeln kann, welche höchstens mit einer endlichen Anzahl negativer Potenzen desselben beginnt.

In gleicher Weise wollen wir jetzt zeigen, dass und wie man eine rationale Function $f(x, y)$ von zwei Variabeln in endlicher Umgebung eines beliebigen Curvenzweiges l_0 $(y = y_0 = \mathfrak{P}(x \mid \alpha))$ ebenfalls in eine nach ganzen Potenzen des zugehörigen Linearfactors $(y - y_0)$ fortschreitende Potenzreihe entwickeln kann, welche ebenfalls höchstens mit einer endlichen Anzahl negativer Potenzen von $y - y_0$ beginnt und innerhalb einer endlichen Umgebung jenes Curvenzweiges gleichmässig convergirt.

Es sei also:

$$(1) \qquad y = y_0 = \mathfrak{P}(x \mid \alpha)$$

ein Zweig l_0 einer beliebigen algebraischen Curve $P(y, x) = 0$, oder, was dasselbe ist, ein Element einer beliebigen algebraischen Function in der Umgebung einer beliebigen Stelle $(x = \alpha)$ und es werde wieder, um gleich den allgemeinsten Fall zu betrachten, angenommen, dass jene Potenzreihe nach ganzen Potenzen von $(x - \alpha)^{\frac{1}{a}}$ fortschreitet, d. h. dass jener Curvenzweig an der Stelle $x = \alpha$ einen a-blättrigen Verzweigungspunkt besitzt. Denkt man sich dann jenes Element y_0 durch analytische Fortsetzung nach allen Seiten ausgebreitet so erhält man die ganze zugehörige algebraische Function, welche wir als μ-wertig voraussetzen wollen. Ihre Werthe sind dann eindeutig und im Allgemeinen stetig auf einer ganz bestimmten μ-blättrigen Riemann'schen Kugelfläche ausgebreitet, welche im Folgenden stets durch $R(y_0)$ bezeichnet und als gegeben vorausgesetzt werden soll. — Sind $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(\mu-1)}$ die μ zu dem Element y_0 conjugirten Potenzreihen, so genügt die algebraische Function y_0 der irreductiblen Gleichung μ^{ten} Grades:

$$P(y, x) = (y - y_0)(y - y_0') \ldots (y - y_0^{(\mu-1)}) = y^\mu + p_1(x) y^{\mu-1} + \ldots + p_\mu(x) = 0$$

mit rationalen Functionen von x als Coefficienten.

Es sei $\mathfrak{p}_0$ der zu dem Functionenelemente y_0 gehörige Punkt der Riemann'schen Kugelfläche; dann convergirt jene Reihe gleichmässig innerhalb eines Kreises oder, falls y_0 für $x = \alpha$ unendlich wird, innerhalb eines jenen Mittelpunkt ausschliessenden Kreisringes, dessen äusserer Begrenzungskreis durch den nächsten Pol von y_0 oder durch den nächsten Verzweigungspunkt der Kugelfläche $R(y_0)$ hindurchgeht. Dieser stets endliche Convergenzbereich der Reihe y_0 werde durch A_0 bezeichnet.

Um nun eine beliebige rationale Function $f(y, x)$ in der angegebenen Weise in eine Potenzreihe zu entwickeln führen wir zunächst an Stelle von x die neue unabhängige Variable ξ durch die Gleichung:

$$(x - \alpha)^{\frac{1}{a}} = \xi, \qquad x = \alpha + \xi^a$$

ein, wodurch die Reihe y_0 in eine nach ganzen Potenzen von ξ fortschreitende und in der Umgebung von $\xi = 0$ convergirende Potenzreihe übergeht. Entwickelt man dann in der rationalen Function $f(x, y)$ Zähler und Nenner für sich nach dem Taylor'schen Satze nach Potenzen von $y - y_0$ so ergiebt sich:

$$(2) \qquad f(y, x) = \frac{g(y, x)}{h(y, x)} = \frac{g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) + \frac{g''(y_0)}{\underline{|2}}(y - y_0)^2 + \dots}{h(y_0) + h'(y_0)(y - y_0) + \frac{h''(y_0)}{\underline{|2}}(y - y_0)^2 + \dots},$$

wo alle Ableitungen im Zähler und Nenner Potenzreihen in ξ sind, welche ebenfalls innerhalb A_0 convergiren. Lässt man jetzt diejenigen Reihen im Zähler und Nenner fort, welche gleich Null sind, und setzt die entsprechende Potenz von $y - y_0$ vor den Bruch, so kann derselbe so geschrieben werden:

$$(3) \qquad f(y, x) = (y - y_0)^\sigma \cdot \frac{g_0(\xi) + g_1(\xi)(y - y_0) + \dots + g_r(\xi)(y - y_0)^r}{h_0(\xi) + h_1(\xi)(y - y_0) + \dots + h_s(\xi)(y - y_0)^s}.$$

Wir dividiren endlich noch Zähler und Nenner durch $h_0(\xi)$ und schreiben den Ausdruck dann in der folgenden Form:

$$(4) \qquad f(y, x) = (y - y_0)^\sigma \cdot \frac{\bar{g}_0(\xi) + \bar{g}_1(\xi)(y - y_0) + \dots + \bar{g}_r(\xi)(y - y_0)^r}{1 - (\bar{h}_1(\xi)(y - y_0) + \dots + \bar{h}_s(\xi)(y - y_0)^s)};$$

auch hier sind die Quotienten:

$$\bar{g}_i(\xi) = \frac{g_i(\xi)}{h_0(\xi)}, \qquad \bar{h}_k(\xi) = -\frac{h_k(\xi)}{h_0(\xi)} \qquad \binom{i = 0, 1, 2, \dots, r}{k = 1, 2, \dots, s}$$

Potenzreihen von ξ, welche höchstens eine endliche Anzahl negativer Potenzen von ξ enthalten, und deren Convergenzkreis entweder mit dem vorigen übereinstimmt, oder durch die nächste Nullstelle von $h_0(\xi)$ hindurchgeht. Es möge der stets endliche gemeinsame Convergenzradius jener Reihen durch ρ_0 bezeichnet werden.

Um nun die in jenen Reihen eventuell auftretenden negativen Potenzen von ξ zu beseitigen führen wir an Stelle von y die neue Variable η durch die Gleichung ein:

$$\frac{y - y_0}{\xi^d} = \eta \tag{5}$$

und wählen die ganze Zahl $d = \delta a$ als das kleinste Multiplum von a so, dass sich in (4) nach Substitution von $\eta \xi^d = \eta (x - \alpha)^\delta$ für $y - y_0$ alle negativen Potenzen von ξ, natürlich mit Ausnahme derer von $\bar{g}_0(\xi)$, fortheben; beseitigen wir auch diese endlich dadurch, dass wir jene Potenz von ξ vor den Bruch schreiben, so kann $f(x, y)$ so dargestellt werden:

$$f(x, y) = \xi^\rho \eta^\sigma \cdot \frac{\varphi(\xi\eta)}{1 - \eta \cdot \psi(\xi\eta)}$$

wo $\varphi(\xi\eta)$ und $\psi(\xi\eta)$ Potenzreihen von ξ und η sind, welche keine negativen Potenzen von ξ und η enthalten, und die für $|\xi| < \rho_0$ und für ein beliebig grosses η convergiren, da sie ja für η nur von endlichem Grade sind.

Beschränkt man nun ξ und η zunächst so, dass:

$$|\xi| < \rho_0, \qquad |\eta \cdot \psi(\xi\eta)| < 1 \tag{5'}$$

ist, so kann man den Nenner entwickeln und erhält:

$$f(x, y) = \xi^\rho \eta^\sigma \varphi(\xi\eta)(1 + \eta\psi + \eta^2\psi^2 + \ldots) = \xi^\rho \eta^\sigma \cdot p(\xi\eta),$$

und da bei den soeben gemachten Beschränkungen sowohl $\varphi(\xi\eta)$ als auch die Reihe $\Sigma(\eta\psi)^i$ gleichmässig convergirt, so gilt dasselbe von ihrem Producte; dasselbe kann also in eine Potenzreihe $p(\xi\eta)$ von ξ und η geordnet werden, welche innerhalb desselben Bereiches gleichmässig convergirt.

Dieser Convergenzbereich für ξ und η ist niemals unendlich klein. In der That ist ja die Bedingung $|\eta\psi(\xi\eta)| < 1$ sicher a fortiori erfüllt, wenn man die Reihe

$$\psi(\xi\eta) = \Sigma \psi_{ik} \xi^i \eta^k$$

durch eine andere Reihe $\bar{\psi}(\xi\eta)$ ersetzt, in welcher alle Coefficienten ψ_{ik} durch ihre absoluten Beträge ersetzt, und diese dann noch beliebig vergrössert sind; betrachtet man nun alle die Werthsysteme $\xi\eta$, für welche $|\eta\bar{\psi}(\xi\eta)| < 1$ ist, so ist für diese die obige Bedingung (5') ebenfalls erfüllt.

Convergirt nun eine Reihe $\psi(\xi\eta)$ für $|\xi| = \rho$ und $|\eta| = \sigma$ und ist γ der grösste Werth den $|\psi(\xi\eta)|$ für jene Werthsysteme annehmen kann, so ist bekanntlich allgemein:

$$|\psi_{ik}| \leqq \frac{\gamma}{\rho^i \sigma^k},$$

also ist für alle Werthe $|\xi| < \rho$ und $|\eta| < \sigma$

$$|\eta\psi(\xi\eta)| \leqq |\eta| \sum \gamma \cdot \left(\frac{|\xi|}{\rho}\right)^i \left(\frac{|\eta|}{\sigma}\right)^k = \frac{\gamma|\eta|}{\left(1 - \frac{|\xi|}{\rho}\right)\left(1 - \frac{|\eta|}{\sigma}\right)},$$

und jener Ausdruck ist sicher kleiner als 1 wenn:

$$\gamma|\eta| < 1 - \frac{|\xi|}{\rho} - \frac{|\eta|}{\sigma} \quad \text{also} \quad |\eta| < \frac{1 - \frac{|\xi|}{\rho}}{\gamma + \frac{1}{\sigma}}$$

angenommen wird; und da hier der Bereich σ für $|\eta|$ beliebig gross also $\frac{1}{\sigma}$ sicher gleich 1 und ρ beliebig nahe an ρ_0 angenommen werden kann, so ergiebt sich für ξ und η die folgende Beziehung:

$$|\xi| < \rho < \rho_0, \qquad |\eta| < \frac{1 - \frac{|\xi|}{\rho}}{\gamma + 1},$$

wenn γ jetzt den Maximalwerth von $|\psi(\xi\eta)|$ für $|\xi| = \rho < \rho_0$ und $|\eta| = 1$ bedeutet, und für jeden Werth von ξ ergiebt sich so ein ganz bestimmter endlicher Werth für η.

Ordnet man die so sich ergebende Potenzreihe nunmehr nach Potenzen von η allein und multiplicirt man in jener Reihe jedes Glied mit der positiven oder negativen Potenz ξ^ρ, so ergiebt sich die folgende Darstellung für $f(x, y)$

(6) $$f(x, y) = f_\sigma(\xi)\eta^\sigma + f_{\sigma+1}(\xi)\eta^{\sigma+1} + \dots,$$

wo die Coefficienten Potenzreihen sind, die nach ganzen Potenzen von ξ fortschreiten, in einer endlichen Umgebung von $\xi = 0$ gleichmässig convergiren und höchstens eine endliche Anzahl negativer Potenzen von ξ

enthalten, wie weit man auch in jener Reihe fortgehen mag. Ferner ist der Exponent σ der Anfangsgliedes jener Reihe offenbar gleich der Ordnungszahl, welche die rationale Function $f(x, y)$ in Bezug auf den Linearfactor $y - y_0$ besitzt und ihrer Entstehungsweise nach sind die Potenzreihen $f_\sigma(\xi), \ldots$ als rationale Functionen von $g^{(i)}(y_0)$ und $h^{(k)}(y_0)$ ebenfalls rationale Functionen von y_0 und x, also algebraische Functionen, welche auf der zu y_0 zugehörigen Riemann'schen Fläche eindeutig sind. Wörtlich dasselbe Resultat erhält man, wenn man für den Curvenzweig $y = y_0$ in der Umgebung von $x = \alpha$ einen der speciellen Zweige:

$$y = \infty, \quad \text{oder} \quad x = \alpha, \quad \text{oder} \quad x = \infty$$

in der Umgebung der Stellen:

$$x = \alpha, \quad \text{oder} \quad y = \beta \quad \text{oder} \quad y = \beta$$

wählt. Man hat dann in jener Entwicklung nur jedesmal zu setzen:

$$\xi = x - \alpha, \qquad \eta = \frac{\frac{1}{y}}{(x-\alpha)^d}; \quad \text{oder} \quad \xi = y - \beta, \qquad \eta = \frac{x - \alpha}{(y-\beta)^d};$$

oder endlich:

$$\xi = y - \beta, \qquad \eta = \frac{\frac{1}{x}}{(y-\beta)^d},$$

und alsdann gilt jedesmal genau die oben angegebene Entwickelung (6).

Um nun jenes Resultat allgemein aussprechen zu können bezeichnen wir den Linearfactor $y - y_0$, welcher für alle und nur die Punkte der Curvenzweiges y_0 in der Umgebung der Stelle $x = \alpha$ verschwindet, als den zu jenem Zweige gehörigen Linearfactor; und allgemeiner bezeichnen wir ebenso auch den vorher eingeführten Linearfactor:

$$\eta = \frac{y - y_0}{\xi^d} = \frac{y - y_0}{(x-\alpha)^\delta},$$

welcher für alle Punkte mit Annahme von $(x = \alpha)$ selbst die gleiche Eigenschaft hat. Dann kann jenes Resultat folgendermassen ausgesprochen werden:

Eine rationale Function $f(x, y)$ kann in der Umgebung eines beliebigen Curvenzweiges $y = y_0$ stets auf eine und nur eine Weise

in eine Potenzreihe entwickelt werden, welche nach ganzen Potenzen des zugehörigen Linearfactors η fortschreitet und höchstens eine endliche Anzahl negativer Potenzen desselben enthält. Alle Coefficienten in jener Entwickelung sind mit y_0 gleich verzweigte algebraische Potenzreihen, deren Ordnungszahlen, falls sie negativ sind, jedenfalls alle unter eine endlichen Grenze bleiben.

Dieser Satz ist die directe Verallgemeinerung des bekannten Theoremes für die rationalen Functionen von einer Variablen.

Der Convergenzbereich der Reihen $f_\sigma(\xi), f_{\sigma+1}(\xi), \ldots$ geht auf der Kugelfläche $R(y_0)$ durch den nächsten critischen Punkt von y_0 oder durch die nächste Nullstelle der algebraischen Function $h_0(\xi)$ hindurch, welche ja auch auf $R(y_0)$ eindeutig ist. Schliesst man alle jene singulären Punkte, welche nur in endlicher Anzahl auftreten, zunächst aus, und bezeichnet alle übrigen Punkte von $R(y_0)$ als die regulären Stellen, ihre Gesammtheit als den regulären Bereich, so besteht für jede reguläre Stelle eine Entwickelung:

$$(7) \qquad f(x, y) = f_\sigma(x \mid \alpha)(y - y_0)^\sigma + f_{\sigma+1}(x \mid \alpha)(y - y_0)^{\sigma+1} + \ldots$$

wo y_0 sowol als alle Coefficienten $f_k(x \mid \alpha)$ nach *ganzen* Potenzen von $x - \alpha$ fortschreiten, und garkeine negativen Potenzen enthalten. Geht man von einer solchen regulären Stelle auf $R(y_0)$ aus, so kann sie mit Umgehung aller singulären Punkte zu jedem anderen regulären Punkte jener Fläche übergeführt werden; für die singulären Punkte und ihre Umgebung gelten dann die entsprechenden Entwickelungen (6), nur dass für die Verzweigungspunkte an die Stelle von $x - \alpha$ die Potenz $(x - \alpha)^{\frac{1}{a}}$, und für die Nullstellen von $h_0(\xi)$ an die Stelle von $y - y_0$ der allgemeinere Linearfactor $\frac{y - y_0}{\xi^d}$ treten kann.

Der Exponent σ von $(y - y_0)$ mit welchem die Entwickelung (7) beginnt, ist, wie oben erwähnt, gleich der Ordnungszahl von $f(y, x)$ in Bezug auf jenen Linearfactor. Bei der Fortsetzung der Reihe (7) über die ganze Riemann'sche Fläche $R(y_0)$ oder längs der ganzen Curve P bleibt aber offenbar die Ordnungszahl σ stets die gleiche; jene Function f besitzt also die Ordnungszahl σ nicht bloss für den einen Zweig $(y = y_0)$ der irreductiblen Curve P sondern in Bezug auf die ganze Curve; dies er-

kennt man hier auch direct, denn eine Function f besitzt dann und nur dann in Bezug auf den Linearfactor $(y - y_0)$ die Ordnungszahl σ, wenn sie die Potenz $P(y, x)^\sigma$ der zugehörigen irreductiblen Function $P(y, x)$ als Factor enthält.

§ 4. *Die algebraischen Functionen von 2 Variablen. Ihre Entwickelung in der Umgebung eines regulären Curvenzweiges.*

Wir wollen die Resultate der letzten Abschnitte benutzen, um die n Wurzeln oder Zweige $z_1, z_2, \dots, z_n$ einer algebraischen Gleichung n^{ten} Grades mit ganzen rationalen Coefficienten:

(1) $$f(z, xy) = A_n(x, y)z^n + A_{n-1}(x, y)z^{n-1} + \dots + A_1(x, y)z + A_0(x, y) = 0$$

ebenfalls in der Umgebung eines beliebigen Curvenzweiges

(2) $$y = y_0 = \mathfrak{P}_0(x \mid \alpha), \qquad |x - \alpha| < \delta$$

in Reihen zu entwickeln, welche nach Potenzen des zugehörigen Linearfactors $y - y_0$ fortschreiten. Geometrisch heisst das, wir wollen die Oberfläche (1) in der Umgebung derjenigen n Raumcurven betrachten, in denen die zu der ebenen Curve (2) gehörige Cylinderfläche die n Blätter jener Oberfläche durchsetzt. Wir setzen der Einfachheit wegen zunächst wieder voraus, dass der betrachtete Punkt $\mathfrak{P}$ im Endlichen liegt, dass also erstens α einen endlichen Werth besitzt und dass zweitens die Reihe y_0 die Form hat

$$y_0 = \beta_0 + \beta_1(x - \alpha)^{\frac{1}{a}} + \beta_2(x - \alpha)^{\frac{2}{a}} + \dots$$

also nicht mit negativen Potenzen von x anfängt. Wäre dies nämlich nicht der Fall, wäre etwa:

$$y_0 = (x - \alpha)^{-\frac{h}{a}}\left(\beta_0 + \beta_1(x - \alpha)^{\frac{1}{a}} + \dots\right),$$

so brauchte man nur wie im § 1 $y' = \frac{1}{y}$ an Stelle von y einzuführen, um diesen allgemeineren Fall auf den hier behandelten zu reduciren.

Ohne die Allgemeinheit zu beschränken können und wollen wir ferner voraussetzen, dass in der definirenden Gleichung (1) für z $A_n(x, y) = 1$

und alle übrigen Coefficienten *ganze* Functionen von x und y sind, dass also jene Gleichung die Form hat:

$$(3)\qquad f(z,y) = z^n + a_{n-1}(x,y)z^{n-1} + \ldots + a_1(x,y)z + a_0(x,y) = 0,$$

wo alle $a_i(x,y)$ ebenfalls ganze Functionen von x und y sind; denn sollte das nicht der Fall sein, so braucht man in (1) bekanntlich nur $z = \frac{\bar{z}}{A_n(xy)}$ zu setzen; dann genügt $\bar{z}$ einer Gleichung von der Form (3). Besitzt die Gleichung für z die Form (3) so entsprechen jedem Punkt $x = \alpha$, $y = \beta$ im Endlichen genau n gleiche oder verschiedene aber stets endliche bestimmte Werthe $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ von z, welche die Wurzeln der Gleichung:

$$\gamma^n + a_{n-1}(\alpha, \beta)\gamma^{n-1} + \ldots + a_0(\alpha, \beta) = 0$$

sind. Die durch die Gleichung (3) definirte algebraische Function besitzt also den Character einer *ganzen* rationalen Function, und soll daher eine *ganze* algebraische Function von (x, y) genannt werden.

Wir setzen ferner voraus, dass jene Function $f(z,y)$ mit ihrer nach z genommenen Ableitung $f'_z(z,y)$ keinen gemeinsamen Theiler hat, dass sie also für unbestimmte (x,y) keine gleichen Wurzeln besitzt. Auch hierin liegt keine Beschränkung der Allgemeinheit, denn einen solchen Theiler könnte man ja durch das Euclidische Verfahren bestimmen und vorher durch Division entfernen. Haben dann $f(z)$ und $f'(z)$ keinen gemeinsamen Theiler, so kann man ebenfalls durch das Euclidische Verfahren zwei *ganze* Functionen von z, y und x $g(z)$ und $g_1(z)$ so bestimmen, dass:

$$(4)\qquad f(z)g(z) + f'(z)g_1(z) = D(x,y)$$

ist, wo $D(x,y)$ eine durch jenes Verfahren sich ergebende *ganze* Function von x und y, die sogenannte *Discriminante* von $f(z)$ ist, welche also in der (xy)-Ebene eine bestimmte Curve, die s. g. *Discriminantencurve* darstellt.

Soll nun für alle Stellen in der Umgebung des beliebig angenommenen Curvenzweiges $y = y_0$ eine Reihe

$$z = e_0(x|\alpha) + e_1(x|\alpha)(y - y_0) + \cdots$$

gleichmässig convergiren, und die Gleichung $f(z,y) = 0$ befriedigen, so muss zunächst für $y = y_0$, d. h. für alle Punkte *auf* jenem Zweige $z = e_0(x|\alpha)$

sein, d. h. die Reihe $e_0(x|\alpha)$ muss die Gleichung $f(e_0, y_0) = 0$ in der Umgebung der Stelle $x = \alpha$ befriedigen, welche man aus (3) erhält, wenn man y durch die Potenzreihe $y_0 = \mathfrak{P}_0(x|\alpha)$ ersetzt. Die so sich ergebende Gleichung:

$$(5) \qquad f(e_0, y_0) = e_0^n + a_{n-1}(y_0, x)e_0^{n-1} + \dots + a_0(y_0, x) = 0$$

besitzt dann als Coefficienten ganze rationale Functionen von y_0 und x, dieselben sind also sämmtlich algebraische Potenzreihen von $x - \alpha$, welche mit y_0 gleich verzweigt sind, keine negativen Potenzen von $x - \alpha$ enthalten und denselben Convergenzbereich wie y_0 selbst besitzen. Jene Gleichung besitzt demnach genau n und nur n gleiche oder verschiedene Wurzeln:

$$(5') \qquad e_0^{(1)}(x|\alpha), \; e_0^{(2)}(x|\alpha), \; \dots; \; e_0^{(n)}(x|\alpha)$$

welche ebenfalls algebraische Potenzreihen sind, die innerhalb einer endlichen Umgebung der Stelle α gleichmässig convergiren und keine negativen Potenzen von $x - \alpha$ enthalten.

Lässt man den Punkt $x = \alpha$ alle mögliche Umläufe machen, durch die y_0 in sich selbst übergeführt wird, so vertauschen sich die n Potenzreihen $e_0^{(i)}(x|\alpha)$ unter einander. Sind

$$e_0^{(1)}(x|\alpha), \; \dots, \; e_0^{(\nu)}(x|\alpha)$$

alle und nur diejenigen unter den n Wurzeln (6), in welche $e_0^{(1)}(x|\alpha)$ durch jene Umläufe übergeführt werden kann, so genügen diese für sich einer und zwar einer irreductiblen Gleichung ν^{ten} Grades

$$f_1(e_0, y_0) = 0$$

deren Coefficienten rational von y_0 abhängen, und welche ein Factor der ganzen Gleichung n^{ten} Grades $f(e_0, y_0) = 0$ in (5) ist. In gleicher Weise können auch die übrigen $n - \nu$ Wurzeln in Gruppen zusammengehöriger Wurzeln geordnet werden, die den einzelnen irreductiblen Factoren von $f(e_0, y_0)$ entsprechen.

Unter jenen Wurzeln $e_0^{(h)}(x|\alpha)$ können gleiche vorkommen; dieser Fall kann aber nur dann eintreten, wenn der Zweig $y = y_0$ der Discriminantencurve angehört. Ist nämlich etwa $e_0^{(1)}(x|\alpha)$ eine mehrfache Wurzel von

$f(e_0, y_0) = 0$, so ist sie auch eine Wurzel der Gleichung $f'(e_0, y_0) = 0$; ersetzt man also in der Identität (4) y und z bzw. durch y_0 und $e_0^{(1)}(x \mid \alpha)$, so verschwindet ihre linke, also auch ihre rechte Seite, d. h. es muss $D(x, y_0) = 0$ sein, w. z. b. w.

Wir bezeichnen nun speciell eine jener n so bestimmten Reihen (5′) durch $e_0(x \mid \alpha)$ und setzen zunächst voraus dass sie keine mehrfache Wurzel von $f(e_0, y_0) = 0$, dass also sicher:

$$(6) \qquad f'(e_0, y_0) \neq 0$$

ist. Wir zeigen dann, dass zu diesem Anfangsgliede eine und nur eine eindeutig bestimmte Reihe

$$z_0 = e_0 + e_1(y - y_0) + e_2(y - y_0)^2 + \cdots$$

gehört, deren sämmtliche Coefficienten mit e_0 gleich verzweigte algebraische Potenzreihen sind, welche in der Umgebung jenes Zweiges gleichmässig convergirt und die ursprüngliche Gleichung $f(z, y) = 0$ befriedigt.

Zu diesem Zwecke setze ich:

$$z = e_0 + \zeta, \qquad y = y_0 + \eta$$

so dass die zu lösende Aufgabe jetzt die ist, in der Reihe:

$$(6') \qquad \zeta_0 = z_0 - e_0 = e_1(x \mid \alpha)\eta + e_2(x \mid \alpha)\eta^2 + \cdots$$

die Coefficienten $e_1, e_2, \ldots$ zu finden. Nun ist also:

$$(7) \quad f(z, y) = f(e_0 + \zeta, y_0 + \eta) = f(e_0, y_0) + \zeta f_{10}(e_0, y_0) + \eta f_{01}(e_0, y_0)$$
$$+ \frac{1}{\underline{|2}}\left(f_{20}(e_0, y_0)\zeta^2 + 2f_{11}(e_0, y_0)\zeta\eta + f_{02}(e_0, y_0)\eta^2\right) + \cdots$$

wo allgemein

$$\left(\frac{\partial^{i+k} f(z, y)}{\partial z^i \partial y^k}\right)_{z=e_0, y=y_0} = f_{ik}(e_0, y_0)$$

gesetzt ist. Aus dieser Gleichung ergiebt sich, wenn man beachtet, dass $f(e_0, y_0) = 0$, $f_{10}(e_0, y_0) \neq 0$ ist, folgende Darstellung für ξ

$$(8) \qquad \zeta = \left(-\frac{f_{01}}{f_{10}}\right)\eta - \left(2\frac{f_{02}}{f_{10}}\right)\eta^2 - \left(\frac{f_{11}}{f_{10}}\right)\eta\zeta - \left(2\frac{f_{20}}{f_{10}}\right)\zeta^2 - \cdots.$$

Die Coefficienten auf der rechten Seite dieser Gleichung sind ebenfalls algebraische Potenzreihen von $x-\alpha$, welche mit $e_0(x|\alpha)$ gleichverzweigt sind, da alle jene Quotienten rationale Functionen von e_0, y_0, und x sind; ihr gemeinsames Convergenzbereich ist ebenfalls endlich, denn es stimmt entweder mit dem von e_0 überein, oder es geht hin zu der nächsten Nullstelle von $f_{10}(e_0, y_0)$; aber in dieser Gleichung (8) können einige Coefficienten mit einer endlichen Anzahl negativer Potenzen von $x-\alpha$ beginnen. Da $e_0(x|\alpha)$ und $y_0(x|\alpha)$ keine negativen Potenzen enthalten, so gilt das Gleiche von allen Coefficienten $f_{ik}(e_0, y_0)$. Nur dann können also in (8) negative Potenzen von $x-\alpha$ auftreten, wenn der gemeinsame Nenner $\frac{df}{dz} = f_{10}(e_0, y_0)$ von positiver Ordnung ist. Ist dies der Fall, und setzt man in der Gleichung (4) des vorigen Abschnittes $x=\alpha$, $y=y_0$, $z=e_0$, so verschwindet ihre linke, also auch ihre rechte Seite, man erhält also für eine solche Stelle die Gleichung $D(\alpha, y_0) = 0$, aus der sich ergiebt, dass in der Gleichung (8) in den Coefficienten nur dann negative Potenzen von $x-\alpha$ auftreten können, wenn der Punkt $\mathfrak{P}$ ein Schnittpunkt der Curve P mit der Discriminantencurve ist. Um diese negativen Potenzen, falls sie auftreten sollten, von vorn herein zu beseitigen, führen wir an Stelle von η und ζ neue Variable η_1 und ζ_1 durch die Gleichungen:

$$(9) \qquad \eta = (x-\alpha)^\sigma \eta_1, \qquad \zeta = (x-\alpha)^\tau \zeta_1$$

ein, und wählen die ganzen Zahlen τ und σ so, dass sie möglichst klein sind, und dass sich in der aus (8) folgenden Gleichung für ξ_1 und η_1

$$(10) \quad \zeta_1 = \left(-\frac{f_{01}}{f_{10}}\right)(x-\alpha)^{\sigma-\tau}\eta_1 - \left(2\frac{f_{02}}{f_{10}}\right)(x-\alpha)^{2\sigma-\tau}\eta_1^2 - \left(\frac{f_{11}}{f_{10}}\right)(x-\alpha)^{\sigma}\eta_1\zeta_1 - \left(2\frac{f_{20}}{f_{10}}\right)(x-\alpha)^{\tau}\zeta_1^2 - \cdots$$

alle negativen Potenzen von $x-\alpha$ fortheben. Dieser Bedingung kann, da die Entwickelung in (8) abbricht, offenbar stets genügt werden. Alsdann kann die jetzt zu lösende Aufgabe bei einfacherer Bezeichnung der Entwickelungscoefficienten in (10) und (6′) folgendermassen ausgesprochen werden:

Es soll die Gleichung

$$(11) \qquad \zeta_1 = g_{10}(x|\alpha)\eta_1 + \sum_{i+k=2,3,\ldots} g_{ik}(x|\alpha)\eta_1^i\zeta_1^k$$

in welcher die Coefficienten $g_{10}(x|\alpha)$, $g_{20}(x|\alpha)$, ... *ganze* Potenzreihen von $x - \alpha$ sind, durch eine Reihe:

$$(11') \qquad \zeta_1 = \varepsilon_1(x|\alpha)\eta_1 + \varepsilon_2(x|\alpha)\eta_1^2 + \dots$$

befriedigt werden.

Diese Aufgabe kann nun, auch wenn man nicht voraussetzt, dass, wie es hier der Fall ist, die Reihe der Coefficienten $g_{ik}(x|\alpha)$ abbricht, stets auf eine und auch nur auf eine Weise gelöst werden wenn nur die Reihe $\Sigma g_{ik}(x|\alpha)\eta_1^i\zeta_1^k$ in einer endlichen Umgebung der Stelle $\eta_1 = 0$, $\zeta_1 = 0$, $x = \alpha$ gleichmässig convergirt. Setzt man nämlich in (11) für ζ_1 die Reihe (11') ein, und ordnet dann die rechte Seite der so sich ergebenden Gleichung

$$(11'') \qquad (\varepsilon_1\eta_1 + \varepsilon_2\eta_1^2 + \dots) = g_{10}\eta_1 + \Sigma g_{ik}\eta_1^i(\varepsilon_1\eta_1 + \varepsilon_2\eta_1^2 + \dots)^k$$

nach steigenden Potenzen von η_1 so ist dieselbe innerhalb ihres Convergenzbereiches nur dann erfüllt, wenn die noch unbekannten Coefficienten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ so gewählt werden, dass die Coefficienten auf beiden Seiten von (11'') gleich sind. So erhalten wir eine Reihe von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= g_{10},\\
\varepsilon_2 &= g_{20} + g_{11}\varepsilon_1 + g_{02}\varepsilon_1^2,\\
\varepsilon_3 &= g_{30} + g_{21}\varepsilon_1 + g_{12}\varepsilon_1^2 + g_{03}\varepsilon_1^3 + g_{11}\varepsilon_2 + 2g_{02}\varepsilon_1\varepsilon_2\\
&\dots\dots\dots\dots ,
\end{aligned}$$

und man erkennt leicht, dass sich allgemein aus der Vergleichung der Coefficienten von η_1^k auf beiden Seiten für ε_k eine Gleichung ergiebt:

$$\varepsilon_k = G_k(g_{10}, g_{hi}; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{k-1}) \qquad {\scriptstyle (h+i=2,3,\dots)}$$

in welcher die rechte Seite eine Summe einer endlichen Anzahl von Producten von den Coefficienten g_{hi} und den vorhergehenden Coefficienten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{k-1}$ ist. Setzt man also den Werth von ε_1 in die zweite, die so gefundenen Werthe von ε_1 und ε_2 in die dritte Gleichung ein und fährt so fort, so erhält man für jeden Coefficienten ε_k einen Ausdruck von der Form:

$$(12) \qquad \varepsilon_k = H_k(g_{10}, g_{hi}) \qquad {\scriptstyle (h+i=2,3,\dots)}$$

welcher ebenfalls aus einer endlichen Anzahl der Coefficienten g_{10}, g_{ki} allein durch die Operationen der Addition und der Multiplication gebildet ist.

Aus der Form der so gefundenen Ausdrücke für $\varepsilon_1(x|\alpha)$, $\varepsilon_2(x|\alpha)$, ... folgt zunächst, dass *alle* jene Coefficienten algebraische mit g_{10} und den Reihen g_{ik}, also auch mit $e_0(x|\alpha)$ gleichverzweigte Functionen sind, deren Entwickelungen in der Umgebung der Stelle $(x = \alpha)$ keine negativen Potenzen von $(x - \alpha)$ enthalten, und welche innerhalb des oben angegebenen Convergenzbereiches der Reihen $g(x|\alpha)$ ebenfalls gleichmässig convergiren.

Wir zeigen jetzt weiter, dass die so gefundene Reihe für

$$\zeta_1 = \varepsilon_1(x|\alpha)\eta_1 + \dots$$

als Function von x und von η_1 betrachtet innerhalb einer endlichen Umgebung der Stelle $(x = \alpha, \eta_1 = 0)$ gleichmässig convergirt, und dass die aus ihr sich ergebende Reihe für z_0 die Gleichung $f(z, y) = 0$ nicht nur formal befriedigt, sondern eine Wurzel derselben in einer endlichen Umgebung des Curvenzweiges $(y = y_0, |x - \alpha| < \delta)$ wirklich darstellt.

Zum Beweise der Convergenz führen nun die folgenden ganz allgemeinen Betrachtungen: Denkt man sich in einer Potenzreihe von einer oder von mehreren Variablen, etwa in der Reihe:

$$p(\xi\eta) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}\xi^i\eta^k$$

alle Coefficienten p_{ik} durch ihre absoluten Beträge ersetzt und diese noch beliebig vergrössert, so erhält man eine neue Reihe mit lauter positiven Coefficienten:

$$\bar{p}(\xi\eta) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \bar{p}_{ik}\xi^i\eta^k$$

für welche allgemein $\bar{p}_{ik} \geqq |p_{ik}|$ ist. Jede solche Reihe $\bar{p}(\xi\eta)$ soll *grösser* als die Potenzreihe $p(\xi\eta)$ heissen, und diese Beziehung soll durch die Bezeichnung

$$\bar{p}(\xi\eta) \lll p(\xi\eta)$$

characterisirt werden. Ist z. B.

$$p(\xi) = p_0 + p_1\xi + p_2\xi^2 + \dots$$

eine Potenzreihe von einer Variablen, deren Convergenzradius ρ_0 ist, ist ferner $\rho < \rho_0$ und P gleich oder grösser als der grösste Werth, den $|p(\xi)|$ auf der Peripherie des mit dem Radius ρ um den Nullpunkt beschriebenen Kreises annimmt, so ist bekanntlich allgemein:

$$|p_k| \leqq \frac{P}{\rho^k};$$

es ist also nach unserer Bezeichnung:

$$p(\xi) \ll P\left(1 + \frac{\xi}{\rho} + \frac{\xi^2}{\rho^2} + \ldots\right);$$

also für alle Werthe $|\xi| < \rho$ ist:

$$p(\xi) \ll \frac{P}{1 - \frac{\xi}{\rho}}.$$

Ist nun für irgend eine Reihe $p(\xi\eta) \ll \bar{p}(\xi\eta)$, so folgt aus bekannten Sätzen der Functionentheorie, dass der Convergenzbereich von $p(\xi\eta)$ gleich oder grösser ist als der von $\bar{p}(\xi\eta)$; convergirt also die grössere Reihe in einer endlichen Umgebung der Stelle ($\xi = 0$, $\eta = 0$), so ist sicher das Gleiche für $p(\xi\eta)$ der Fall.

Ist ferner für zwei Potenzreihen $p(\xi\eta)$ und $q(\xi\eta)$

$$p(\xi\eta) \ll \bar{p}(\xi\eta), \quad q(\xi\eta) \ll \bar{q}(\xi\eta),$$

so ergiebt sich durch eine einfache Coefficientenvergleichung:

$$p(\xi\eta) + q(\xi\eta) \ll \bar{p}(\xi\eta) + \bar{q}(\xi\eta),$$

$$p(\xi\eta) \cdot q(\xi\eta) \ll \bar{p}(\xi\eta) \cdot \bar{q}(\xi\eta)$$

und das Gleiche gilt für die Summe und das Product von mehr als zwei Potenzreihen.

Diese Sätze wende ich jetzt auf die vorher gefundene Reihe

$$\zeta_1 = \varepsilon_1(x|a)\eta_1 + \ldots$$

an, deren Coefficienten $\varepsilon_k(x|a)$ convergente Reihen sind, welche nach ganzen

oder gebrochenen Potenzen von $x - a$ fortschreiten; wir nehmen allgemein an, sie schreite nach ganzen Potenzen von:

$$\xi = (x - a)^{\frac{1}{e}}$$

fort.

Um nun die Convergenz jener Reihe:

$$\zeta_1(\xi\eta_1) = \varepsilon_1(\xi)\eta_1 + \varepsilon_2(\xi)\eta_1^2 + \dots$$

nachzuweisen, ersetzen wir alle Coefficienten $\varepsilon_k(\xi)$ durch geeignet gewählte grössere Potenzreihen $\bar{\varepsilon}_k(\xi)$ und brauchen dann nur zu zeigen, dass die so sich ergebende grössere Potenzreihe:

$$\bar{\zeta}_1(\xi\eta_1) = \bar{\varepsilon}_1(\xi)\eta_1 + \bar{\varepsilon}_2(\xi)\eta_1^2 + \dots$$

in einer endlichen Umgebung der Stelle ($\xi = 0$, $\eta_1 = 0$) convergirt. Da nun in den Bestimmungsgleichungen:

$$\varepsilon_k(\xi) = H_k(g_{10}(\xi), g_{hi}(\xi))$$

die rechten Seiten aus den Reihen $g(\xi)$ allein durch Addition und Multiplication gebildet sind, so werden alle jene Reihen vergrössert, wenn jede Reihe $g(\xi)$ durch eine grössere ersetzt wird.

Es sei nun ρ_0 der Radius des gemeinsamen Convergenzkreises aller Reihen $g_{ik}(\xi)$; beschreibt man dann mit einem Radius $\rho < \rho_0$ einen Kreis um den Punkt $\xi = 0$ und ist G eine positive Zahl die grösser als der grösste Werth ist, den alle jene Reihen absolut genommen auf diesem Kreise annehmen, so ist nach der obigen Bemerkung für alle Reihen $g_{10}(\xi)$, $g_{hi}(\xi)$

$$g(\xi) \lessdot \mathfrak{G}(\xi) = \frac{G}{1 - \frac{\xi}{\rho}}.$$

Ersetzt man daher in der Bestimmungsgleichung (11) alle Reihen $g_{10}(\xi)$, $g_{hi}(\xi)$ durch die eine grössere Reihe $\mathfrak{G}(\xi)$, so ergiebt sich eine Reihe $\bar{\zeta}_1(\xi\eta_1)$ welche sicher grösser ist als die zu untersuchende; ist demnach der Convergenzbereich von $\bar{\zeta}_1$ endlich, so gilt dasselbe von ζ_1. Die neue Reihe ist aber durch die Gleichung:

$$\bar{\zeta}_1 = \mathfrak{G}(\xi)\Big(\eta_1 + \sum_{i+k=2}^{\infty} \eta_1^i \bar{\zeta}_1^k\Big)$$

definirt, und diese kann für alle $|\bar{\zeta}_1| < 1$, $|\eta_1| < 1$ in der einfacheren Form geschrieben werden:

$$\bar{\zeta}_1 = \mathfrak{G}(\xi)\left(\frac{1}{(1-\eta_1)(1-\bar{\zeta}_1)} - (1+\bar{\zeta}_1)\right)$$

d. h. $\bar{\zeta}_1$ ist durch die quadratische Gleichung definirt:

$$A\bar{\zeta}_1^2 - \bar{\zeta}_1 + B = 0$$

wenn zur Abkürzung

$$A = 1 + \mathfrak{G}(\xi), \qquad B = \frac{\mathfrak{G}(\xi)\eta_1}{1-\eta_1}$$

gesetzt wird. Aus ihr ergiebt sich:

$$\bar{\zeta}_1 = \frac{1-\sqrt{1-4AB}}{2A},$$

wo das negative Vorzeichen der Wurzel zu wählen ist, da sich $\bar{\zeta}_1$ für $\eta_1 = 0$ oder für $B = 0$ auf Null reduciren soll, und diese Wurzel kann unter der Bedingung

(3) $$|4AB| < 1$$

nach dem binomischen Satze in die Reihe:

$$\bar{\zeta}_1 = B + AB^2 + 2A^2B^3 + 5A^3B^4 + \dots$$

entwickelt werden, welche alsdann für alle der Bedingung (13) genügenden Werthsysteme ξ, η_1 gleichmässig convergirt.

Aus dieser Bedingung (13)

$$|4AB| = \left|4(1+\mathfrak{G}(\xi))\mathfrak{G}(\xi)\frac{\eta_1}{1-\eta_1}\right| < 1$$

ergiebt sich aber unmittelbar die einfachere:

$$|\eta_1| < \frac{1}{(1+2\mathfrak{G}(\xi))^2} = \frac{1}{\left(1+\dfrac{2G}{1-\dfrac{|\xi|}{\rho}}\right)^2}.$$

Wie nahe also auch ρ dem gemeinsamen Convergenzradius ρ_0 aller Reihen

$g(\xi)$, und wie nahe dann auch $|\xi|$ an ρ gewählt werde, immer ergiebt sich für $|\eta_1|$ ein endlicher Convergenzbereich, und man erhält so das Resultat, dass die Reihe $\bar{\zeta}_1(\xi, \eta_1)$ also a fortiori die kleinere Reihe $\zeta_1(\xi, \eta_1)$ stets in einer endlichen Umgebung der Stelle $\xi = 0$, $\eta_1 = 0$ convergirt, wenn man nur ξ innerhalb des Convergenzbereiches der Reihen $g(\xi)$ beliebig annimmt.

Substituirt man jetzt die so gefundene convergente Potenzreihe für ζ_1 in (G), ersetzt wieder ξ durch $(x - \alpha)^{\frac{1}{a}}$, η_1 durch $\frac{\eta}{(x - \alpha)^\sigma}$ und ζ_1 durch $\frac{\zeta}{(x - \alpha)^\tau}$ so erhält man jetzt aus (6′) als eine Lösung der Gleichung $f(z, y) = 0$ die folgende Reihe:

$$z_0 = e_0(x|\alpha) + e_1(x|\alpha)(y - y_0) + e_2(x|\alpha)(y - y_0)^2 + \cdots$$

wo $e_0(x|\alpha)$ die vorher gewählte einfache Wurzel von $f(e_0, y_0) = 0$ bedeutet und allgemein:

$$e_i(x|\alpha) = \frac{\varepsilon_i(x|\alpha)}{(x - \alpha)^{i\sigma - \tau}}$$

ist. Diese Reihen convergiren ebenfalls innerhalb des vorher bestimmten Convergenzbereiches gleichmässig, nämlich innerhalb eines Kreises, welcher entweder mit dem Convergenzbereiche des Anfangsgliedes $e_0(x|\alpha)$ identisch ist, oder dessen Peripherie durch die nächste Nullstelle von $f'(e_0, y_0)$ hindurchgeht. Selbstverständlich ist von diesem Bereiche noch die Stelle $x = \alpha$ selbst auszuschliessen, wenn einige von jenen Reihen $e_i(x|\alpha)$ mit negativen Potenzen von $x - \alpha$ beginnen. Da diese Reihe z_0 durch die Substitutionen:

$$\frac{z_0 - e_0(x|\alpha)}{(x - \alpha)^\tau} = \zeta_1, \qquad \frac{y - y_0}{(x - \alpha)^\sigma} = \eta_1 \qquad (x - \alpha)^{\frac{1}{a}} = \xi$$

in die vorher behandelte Reihe $\zeta_1(\xi, \eta_1)$ übergeht, so folgt, dass auch diese Reihe z_0 als Function von x und y betrachtet stets innerhalb einer endlichen Umgebung des Curvenzweiges $y = y_0$ gleichmässig convergirt, wenn man x innerhalb des vorher angegebenen Convergenzbereiches der Coefficienten $e_i(x|\alpha)$ beliebig annimmt.

Endlich beweise ich noch, dass die so bestimmte convergente Reihe z_0 die Gleichung $f(z, y) = 0$ in einer endlichen Umgebung des Curven-

zweiges $(y = y_0)$ mit jeder vorgegebenen Genauigkeit befriedigt, hier also wirklich eine Wurzel jener Gleichung darstellt. Die Function $f(z, y, x)$ ist aber als ganze Function jener drei Variablen in einer beliebig grossen endlichen Umgebung jeder endlichen Stelle convergent; ersetzt man also jene drei Variablen durch die Ausdrücke:

$$x = a + \xi^a,$$
$$y = y_0 + \xi^{a\sigma}\eta_1,$$
$$z = e_0(\xi) + \xi^{a\tau}\zeta_1,$$

wo ζ_1 die vorher gefundene Reihe

$$\zeta_1 = \varepsilon_1(\xi)\eta_1 + \varepsilon_2(\xi)\eta_1^2 + \dots$$

bedeutet und beachtet man dabei dass jene drei Reihen in endlicher Umgebung der Stelle $(\xi = 0, \ \eta_1 = 0)$, eventuell mit Ausschluss der Nullstelle selbst, gleichmässig convergiren, so convergirt in derselben Umgebung auch die so sich ergebende Potenzreihe von ξ und η_1

$$f\left(e_0(\xi) + \xi^{a\tau}\zeta_1 \,;\, y_0 + \xi^{a\sigma}\eta_1 \,;\, a + \xi^a\right)$$

und kann also nach steigenden Potenzen von η_1 geordnet werden, und da hierbei wegen der Gleichungen für die $\varepsilon_k(\xi)$ alle Coefficienten identisch Null werden, so folgt, dass in der That die so bestimmte Reihe z_0 eine Wurzel der vorgelegten Gleichung in der Umgebung der Stelle $(y = y_0, \ x = a)$ darstellt.

§ 6. *Die Entwickelung der algebraischen Functionen in der Umgebung eines singulären Curvenzweiges.*

Durch die Untersuchungen des letzten Abschnittes ist bewiesen, dass die n Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit ganzen rationalen Coefficienten

(1) $$f(z, xy) = z^n + a_{n-1}(xy)z^{n-1} + \dots + a_1(xy)z + a_0(xy) = 0$$

in der Umgebung eines Curvenzweiges $(y = y_0, |x - \alpha| < \delta)$ in gleichmässig convergente Reihen

$$(1') \qquad e_0(x|\alpha) + e_1(x|\alpha)(y - y_0) + e_2(x|\alpha)(y - y_0)^2 + \ldots$$

entwickelt werden können, falls jener Curvenzweig regulär ist, d. h. nicht der Discriminantencurve angehört.

Wir wollen jetzt erstens die Voraussetzung fallen lassen, dass der Coefficient $A_n(xy) = 1$, dass also z eine *ganze* algebraische Function von x und y ist, und dann auch die weitere, dass der Curvenzweig $(y = y_0)$ ein regulärer ist. Alsdann ändert sich der Character der Potenzreihen (1') für die Wurzeln, wie jetzt gezeigt werden soll, einmal in der Weise, dass dieselben auch mit einer endlichen Anzahl negativer Potenzen von $y - y_0$ beginnen können, wie dies vorher auch für die rationalen Functionen $f(y, x)$ in der Umgebung einer ihrer Polcurven bewiesen wurde. Zweitens aber können in der Umgebung einer singulären Curve einige von den Reihen für die n Wurzeln nicht mehr nach ganzen sondern nach gebrochenen Potenzen des Linearfactors $y - y_0$ fortschreiten, ähnlich wie dies für die algebraischen Functionen von einer Variablen in der Umgebung eines Verzweigungspunktes der Fall ist. Gerade diese singulären Curven sind für die ganze Theorie von fundamentaler Bedeutung, denn sie spielen hier in der That dieselbe Rolle, wie die Verzweigungspunkte der Riemannschen Fläche in der Theorie der algebraischen Functionen *einer* Variablen.

Um jetzt das vorgelegte Problem gleich in seiner allgemeinsten Form zu umfassen und zu lösen, stellen wir uns die folgende Aufgabe:

Es sei z als algebraische Function von x und y durch eine beliebige Gleichung:

$$(1) \qquad f(z, xy) = A_0(xy) + A_1(xy)z + \ldots + A_n(xy)z^n = 0$$

mit rationalen Coefficienten definirt; es sollen ihre n Wurzeln in der Umgebung eines beliebigen Curvenzweiges

$$y = y_0, \qquad |x - \alpha| < \delta$$

durch convergente Reihen:

$$z_0 = e_0(x|\alpha)(y - y_0)^{\epsilon_0} + e_1(x|\alpha)(y - y_0)^{\epsilon_1} + \ldots$$

dargestellt werden, welche nach steigenden Potenzen des zugehörigen Linearfactors fortschreiten, für welche also $\varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \dots$ ist.

Zur Abkürzung setzen wir wieder

$$(2) \qquad (x-\alpha)^{\frac{1}{a}} = \xi, \qquad y - y_0 = \eta$$

wenn die Potenzreihe y_0 nach ganzen Potenzen von $(x-\alpha)^{\frac{1}{a}}$ fortschreitet; alsdann entspricht der Umgebung des Curvenzweiges $(y=y_0,\ x=\alpha)$ die Umgebung der Stelle $(\xi = 0,\ \eta = 0)$. Wir denken uns dann die $(n+1)$ Gleichungscoefficienten $A_i(x, y)$ nach ganzen Potenzen von η in der Umgebung von $(\xi = 0,\ \eta = 0)$ entwickelt; dann mögen sich die folgenden Reihen ergeben:

$$(3) \qquad \begin{aligned} A_0(x, y) &= a_0(\xi)\eta^{\rho_0} + b_0(\xi)\eta^{\rho_0+1} + \dots, \\ A_1(x, y) &= a_1(\xi)\eta^{\rho_1} + b_1(\xi)\eta^{\rho_1+1} + \dots, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_n(x, y) &= a_n(\xi)\eta^{\rho} + b_n(\xi)\eta^{\rho_n+1} + \dots, \end{aligned}$$

wo also die ganzen Zahlen $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_n$, die positiv, negativ oder Null sein können die Ordnungszahlen der Gleichungscoefficienten für den Linearfactor $\eta = y - y_0$ sind, und die $a_i(\xi), b_i(\xi), \dots$ algebraische Potenzreihen nach ganzen Potenzen von ξ bedeuten.

Substituirt man diese Reihen für die Coefficienten, so erhält man eine Reihe $f(z, \xi\eta)$ nach ganzen Potenzen von z, ξ und η, welche, da sie in Bezug auf z nur von endlichem Grade ist, in endlicher Umgebung der Stelle $(z = 0,\ \xi = 0,\ \eta = 0)$ gleichmässig convergirt. Setzt man nun für z eine nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von η fortschreitende Reihe

$$(4) \qquad z_0 = e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0} + e_1(\xi)\eta^{\varepsilon_1} + \dots,$$

und convergirt diese ebenfalls gleichmässig in der Umgebung der Stelle $(\xi = \eta = 0)$ so wird

$$f(z_0, \xi, \eta) = B_0(\xi)\eta^{\gamma_0} + B_1(\xi)\eta^{\gamma_1} + \dots$$

eine ebenfalls nach Potenzen von η fortschreitende Reihe; diese wird

dann und nur dann identisch Null, wenn alle Coefficienten $B_0(\xi), B_1(\xi), \ldots$ identisch verschwinden; offenbar sind diese ganze Functionen der Coefficienten $e_0(\xi), e_1(\xi), \ldots$ von z_0, während die Exponenten $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$ aus den Exponenten $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots$ linear zusammengesetzt sind. Die Aufgabe, die Reihe z_0 als Wurzel der Gleichung $f(z, \xi\eta) = 0$ zu bestimmen, reducirt sich also darauf,

> es sollen die unbekannten Exponenten $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ und die unbekannten Coefficienten $e_0(\xi), e_1(\xi), e_2(\xi), \ldots$ der Reihe z_0 in (4) so bestimmt werden, dass sich in der Entwickelung der Reihe:
>
> $$f(z_0, \xi\eta) = B_0(\xi)\eta^{\gamma_0} + B_1(\xi)\eta^{\gamma_1} + \ldots$$
>
> alle Coefficienten $B_0(\xi), B_1(\xi), \ldots$ auf Null reducieren.

Wir suchen nun zunächst z_0 so zu bestimmen, dass das Anfangsglied $B_0(\xi)\eta^{\gamma_0}$ jener Entwickelung verschwindet, und wir zeigen, dass durch diese Forderung nur das Anfangsglied $e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0}$ und zwar genau n-deutig bestimmt wird, entsprechend den Anfangsgliedern der Potenzreihen, in welche die n Gleichungswurzeln in der Umgebung der Stelle $(\xi = \eta = 0)$ entwickelt werden können.

Setzt man in die linke Seite der vorgelegten Gleichung:

$$f(z, xy) = \sum_{i=0}^{n} A_i(xy) z^i$$

für die Coefficienten $A_i(x, y)$ ihre Entwickelungen (3) und für z die noch unbekannte Entwickelung (4) von z_0 ein, so ergiebt sich für $f(z_0, \xi\eta)$ die Reihe:

$$f(z_0, \xi\eta) = \sum_{i=0}^{n} (a_i(\xi)\eta^{\rho_i} + b_i(\xi)\eta^{\rho_i+1} + \ldots)(e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0} + \ldots)^i,$$

und man erkennt ohne Weiteres, dass die Summe der Anfangsglieder der $(n+1)$ Producte $A_i z^i$ gleich:

$$(5) \quad f_0(\eta) = a_0(\xi)\eta^{\rho_0} + a_1(\xi)e_0\eta^{\rho_1+\varepsilon_0} + a_2(\xi)e_0^2\eta^{\rho_2+2\varepsilon_0} + \ldots + a_n(\xi)e_0^n\eta^{\rho_n+n\varepsilon_0}$$

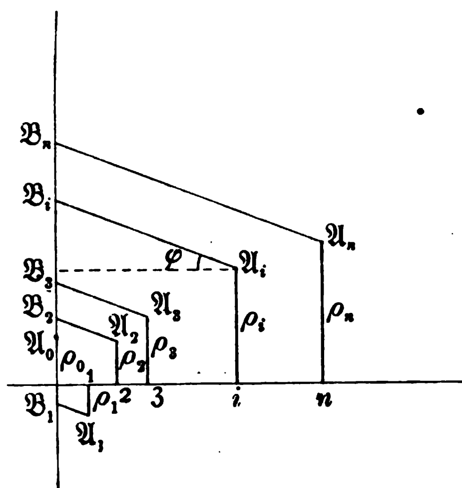
ist, und dass man für einen gegebenen Werth des Exponenten ε_0 das Anfangsglied $B_0(\xi)\eta^{\gamma_0}$ einfach findet, wenn man in $f_0(\eta)$ alle diejenigen

Glieder $a_i(\xi)e_0^i\eta^{\rho_i+i\varepsilon_0}$ zusammenfasst, für welche die Exponenten $\rho_i + i\varepsilon_0$ von η den kleinsten Werth besitzen.

Hieraus folgt zunächst, dass ε_0 nicht so gewählt werden darf, dass nur *einer* der $(n + 1)$ Exponenten:

$$\rho_0\,,\ \rho_1 + \varepsilon_0\,,\ \ldots,\ \rho_n + n\varepsilon_0$$

den kleinsten Werth besitzt, denn wäre etwa $\rho_i + i\varepsilon_0$ kleiner als alle anderen Exponenten $\rho_k + k\varepsilon_0$ so begänne die Entwickelung von $f(z_0, \xi\eta)$ mit dem einen Gliede niedrigster Ordnung $a_i(\xi)e_0^i\eta^{\rho_i+i\varepsilon_0}$ und z_0 könnte nur dann eine Gleichungswurzel sein, wenn $a_i(\xi)e_0(\xi)^i = 0$ also, da $a_i(\xi) \neq 0$



ist, wenn $e_0(\xi) = 0$ wäre. Es ist demnach ε_0 so zu wählen, dass mindestens zwei Exponenten etwa $\rho_g + g\varepsilon_0$ und $\rho_l + l\varepsilon_0$ den kleinsten Werth haben, d. h. dass die beiden Bedingungen erfüllt werden:

$$(6)\qquad \gamma_0 = \rho_g + g\varepsilon_0 = \rho_l + l\varepsilon,$$
$$\rho_k + k\varepsilon_0 \geqq \gamma_0. \qquad (k=0,1,2,\ldots,n)$$

Um nun alle Werthe von ε_0 zu finden, welche diesen beiden Bedingungen (6) genügen, wenden wir die folgende geometrische Repräsentation an, welche in beschränkteren Umfange bei dem s. g. Newton'schen

Parallelogramme benutzt wird. In einem rechtwinkligen Coordinatensysteme denken wir uns die $(n+1)$ Punkte:

$$\mathfrak{A}_0 = (0, \rho_0), \ \mathfrak{A}_1 = (1, \rho_1), \ \ldots, \ \mathfrak{A}_n = (n, \rho_n)$$

so fixirt, dass allgemein für den Punkt $\mathfrak{A}_i$ die Abscisse $x_i = i$, die Ordinate $y_i = \rho_i$, d. h. gleich der Ordnungszahl des i^{ten} Coefficienten $A_i(x, y)$ in Bezug auf den Linearfactor η ist. Denkt man sich nun alle jene Punkte $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ durch parallele Strahlen auf die Ordinatenachse projicirt, und sind $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ die Projectionen jener n Punkte, so ist allgemein die Ordinate von $\mathfrak{B}_i$ gleich $\rho_i + i \operatorname{tg} \varphi$, wenn φ der Steigungswinkel der Projectionsstrahlen ist. Setzt man also

$$\varepsilon_0 = \operatorname{tg} \varphi,$$

so dass also ε_0 die Steigung der Strahlen $\mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_i$ bedeutet, so sind die Ordinaten der $(n+1)$ Projectionen $\mathfrak{B}_0 \ldots \mathfrak{B}_n$ gleich

$$\rho_0, \rho_1 + \varepsilon_0, \rho_2 + 2\varepsilon_0, \ldots, \rho_n + n\varepsilon_0;$$

sie stimmen also mit den Exponenten von η in (5) überein. Also wird man den beiden Bedingungen (6) dann und nur dann genügen, wenn die Steigung ε_0 so gewählt wird, dass von den $(n+1)$ Punkten $\mathfrak{B}_k$ die beiden untersten, etwa $\mathfrak{B}_g$ und $\mathfrak{B}_l$ zusammenfallen. Dieser Bedingung wird offenbar genügt, wenn als Projectionsstrahl eine Sehne $\overline{\mathfrak{A}_l\mathfrak{A}_g}$ so gewählt wird, dass alle anderen Punkte $\mathfrak{A}_0 \ldots \mathfrak{A}_n$ oberhalb oder auf jener Sehne bzw. ihrer Verlängerung liegen, wenn jene Sehne also die Punktreihe $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ nach unten begrenzt.

Alle diese Begrenzungssehnen und damit alle möglichen Werthe von ε_0 findet man somit durch die folgende einfache Construction: Man verbinde den letzten Punkt $\mathfrak{A}_n$ durch eine Gerade $\overline{\mathfrak{A}_n\mathfrak{A}_\varkappa}$ mit demjenigen Punkte $\mathfrak{A}_\varkappa$, welche von $\mathfrak{A}_n$ aus gesehen am tiefsten liegt. Falls mehrere Punkte auf dieser Sehne liegen, wähle man für $\mathfrak{A}_\varkappa$ den äussersten von jenen Punkten. Hierauf verbinde man $\mathfrak{A}_\varkappa$ genau ebenso mit demjenigen von den früheren Punkten, $\mathfrak{A}_\iota$ durch die Gerade $\overline{\mathfrak{A}_\varkappa\mathfrak{A}_\iota}$, welcher von $\mathfrak{A}_\varkappa$ aus gesehen am tiefsten erscheint, und fahre in derselben Weise fort, bis zuletzt ein Punkt $\mathfrak{A}_s$ mit dem ersten Punkte $\mathfrak{A}_0$ durch eine Sehne $\overline{\mathfrak{A}_s\mathfrak{A}_0}$ verbunden wird. Auf diese Weise ergiebt sich ein nach unten con-

vexes Polygon $\overline{\mathfrak{A}_n\mathfrak{A}_u\mathfrak{A}^t} \ldots \overline{\mathfrak{A}_s\mathfrak{A}_0}$, durch welches die Punktreihe nach unten begrenzt wird.

Es sei nun $\overline{\mathfrak{A}_l\mathfrak{A}_g}$ eine jener Begrenzungssehnen, $\mathfrak{A}_l = (l, \rho_l)$ ihr Anfangspunkt und $\mathfrak{A}_g = (g, \rho_g)$ ihr Endpunkt, so dass $l > g$, also in der Reihe $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{A}_l$ ein späterer Punkt ist. Dann ist die Steigung ε_0 der Geraden $\overline{\mathfrak{A}_l\mathfrak{A}_g}$ durch die Gleichung:

$$\varepsilon_0 = -\frac{\rho_l - \rho_g}{l - g}$$

gegeben, also positiv, negativ oder Null, je nachdem $\rho_g \gtreqless \rho_l$ ist. Es seien ferner der Reihe nach etwa

$$\mathfrak{A}_l \mathfrak{A}_k \mathfrak{A}_i \mathfrak{A}_h \mathfrak{A}_g$$

alle diejenigen unter den $(n + 1)$ Punkten, welche *auf* jener Sehne und nicht über ihr liegen. Dann ist

$$\gamma_0 = \rho_l + l\varepsilon_0 = \rho_k + k\varepsilon_0 = \rho_i + i\varepsilon_0 = \rho_h + h\varepsilon_0 = \rho_g + g\varepsilon_0,$$

während für alle übrigen oberhalb $\overline{\mathfrak{A}_l\mathfrak{A}_g}$ liegenden Punkte $\mathfrak{A}_\lambda$

$$\rho_\lambda + \lambda\varepsilon > \gamma_0$$

ist. Dann ist das Aggregat $B_0(\xi)$ aller mit der niedrigsten Potenz η^{γ_0} von η multiplicirten Glieder in der Entwickelung $f(z_0, \xi\eta)$ gleich:

$$\varphi(e_0) = a_l(\xi)e_0^l + a_k(\xi)e_0^k + \ldots + a_g(\xi)e_0^g;$$

es besteht nämlich aus allen und nur den Producten $a_r(\xi)e_0^r$, für welche die zugehörigen Punkte $\mathfrak{A}_r$ auf dieser Begrenzungssehne $\overline{\mathfrak{A}_l\mathfrak{A}_g}$ liegen. Wählt man also für den Exponenten des Anfangsgliedes von $z_0 = e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0} + \ldots$ speciell diesen Werth $-\frac{\rho_l - \rho}{l - g}$, so verschwindet das zugehörige Anfangsglied $B_0(\xi)$ dann und nur dann, wenn $e_0(\xi)$ eine der $(l - g)$ von Null verschiedenen Wurzeln der Gleichung l^{ten} Grades:

$$\varphi(e) = a_l(\xi)e^l + \ldots + a_g(\xi)e^g = 0,$$

oder also eine der Wurzeln der Gleichung $(l - g)^{\text{ten}}$ Grades:

$$\frac{1}{e^g}\varphi(e) = a_l(\xi)e^{l-g} + a_k(\xi)e^{k-g} + \ldots + a_g(\xi) = 0$$

ist, deren Coefficienten $a_l(\xi)\ldots$ algebraische Potenzreihen von ξ sind. Diese Gleichung besitzt nun genau $(l-g)$ Wurzeln welche in irgend einer Reihenfolge durch

$$e_0^{(g+1)}(\xi)\,,\ e_0^{(g+2)}(\xi)\,,\ \ldots\,,\ e_0^{(l)}(\xi)$$

bezeichnet werden mögen; auch sie sind sämmtlich bestimmte algebraische Potenzreihen die im Allgemeinen nach ganzen Potenzen, und nur dann nach gebrochenen Potenzen von ξ fortschreiten, wenn die Stelle $\xi=0$ gerade einem Verzweigungspunkte der der Gleichung $\varphi(e)=0$ zugehörigen Riemann'schen Fläche entspricht.

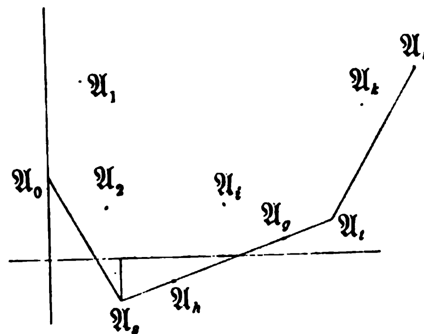


Fig. 2.

So ergiebt sich das folgende Resultat, welches der Einfachheit wegen nur für den in Fig. 2 angenommenen Fall von drei Begrenzungssehnen ausgesprochen werden mag, das aber natürlich ganz allgemein gilt:

Damit eine Potenzreihe:

$$z_0 = e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0} + e_1(\xi)\eta^{\varepsilon_1} + \ldots$$

eine Wurzel der Gleichung $f(z, \xi\eta)$ in der Umgebung der Stelle $(\xi=0\,,\ \eta=0)$ darstelle, muss zunächst der Exponent ε_0 ihres Anfangsgliedes einen der Werthe:

$$\varepsilon_0 = -\frac{\rho_0-\rho_s}{0-s}\,,\qquad \varepsilon_0' = -\frac{\rho_s-\rho_t}{s-t}\,,\qquad \varepsilon_0'' = -\frac{\rho_t-\rho_n}{t-n}$$

besitzen, welche der Steigung der drei Begrenzungssehnen

$$\overline{\mathfrak{A}_s\mathfrak{A}_0}\,,\ \overline{\mathfrak{A}_t\mathfrak{A}_s}\,,\ \overline{\mathfrak{A}_n\mathfrak{A}_t}$$

gleich sind. Damit ferner $e_0(\xi)$ der einem jener drei Exponenten $\varepsilon_0, \varepsilon_0', \varepsilon_0''$ zugehörige Anfangscoefficient sei, muss ε_0 eine von Null verschiedene Wurzel von einer der drei zugehörigen Gleichungen sein

$$\varphi(e) = a_s(\xi)e^s + \ldots + a_{\bar{0}}(\xi) \quad = 0,$$

$$\varphi_1(e) = a_t(\xi)e^t + \ldots + a_s(\xi)e^s = 0,$$

$$\varphi_2(e) = a_n(\xi)e^n + \ldots + a_t(\xi)e^t = 0,$$

deren linke Seiten aus denjenigen Producten $a_i(\xi)e^i$ gebildet sind, für welche die zugehörigen Punkte $\mathfrak{A}_i$ bzw. auf der ersten, zweiten, dritten Begrenzungssehne liegen.

Da so zu den Exponenten $\varepsilon_0, \varepsilon_0', \varepsilon_0''$ bzw. je $s, t - s, n - t$ von Null verschiedenen Coefficienten $e_0(\xi)$ gehören, so ergiebt sich die Anzahl der möglichen Anfangsglieder $e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0}$ genau gleich $s + (t - s) + (n - t) = n$. Im Folgenden soll nun weiter gezeigt werden, dass in der That zu jedem dieser n Anfangsglieder eine und nur eine Gleichungswurzel gehört, d. h. dass man wirklich eine Darstellung aller n Wurzeln jener Gleichung in der Umgebung der Stelle ($\xi = 0, \eta = 0$) auf diese Weise erhält.

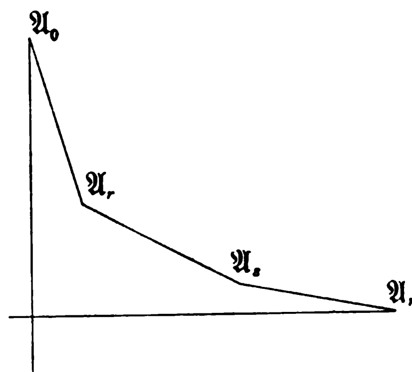


Fig. 3.

Wir ziehen aus diesem Resultate gleich eine für das Spätere wichtige Folgerung: Es sei z eine *ganze* algebraische Function, es seien also in der Gleichung:

$$f(z) = z^n + a_{n-1}(xy)z^{n-1} + \ldots + a_0(xy) = 0$$

alle Coefficienten ganze Functionen von x und y. Ist dann $P(xy)$ eine beliebige irreductible ganze Function von x und y, und $y-y_0$ einer seiner Linearfactoren in y, so beginnen die Entwickelung *aller* Coefficienten $a_i(xy)$ nach Potenzen von $y-y_0$ mit nicht negativen Potenzen; es sind also in den Entwickelungen (3) alle Exponenten $\rho_i \geqq 0$ und $\rho_n = 0$ da $A_n(xy) = 1$ ist. In dem zugehörigen Diagramme besitzen also alle Begrenzungssehnen nothwendig eine positive Steigung oder die Steigung Null, und es ergiebt sich somit der Satz:

Ist z eine *ganze* algebraische Function, so kann die Gleichung $f(z, xy) = 0$ niemals durch eine Reihe $e_0(x)(y-y_0)^{\varepsilon_0} + \dots$ befriedigt werden, deren Anfangsglied von negativer Ordnung ist.

Für die Folge brauchen wir nur die Entwickelung von *einer* jener n Wurzeln zu finden; ist nämlich bewiesen, dass *jede* Gleichung mindestens *eine* solche Reihe als Wurzel besitzt, so wird sehr einfach gezeigt werden, dass jede Gleichung genau so viele solche Wurzeln hat, als ihr Grad angiebt. Wir wollen daher im Folgenden nur eine und zwar eine von denjenigen Reihen $e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0} + \dots$ aufsuchen, deren Ordnungszahl ε_0 den grössten Werth hat. Für sie ist ε_0 einfach die Steigung der *letzten* Begrenzungssehne $\overline{\mathfrak{A}_s\mathfrak{A}_0}$ in dem Diagramme, d. h. es ist

$$\varepsilon_0 = \frac{\rho_0 - \rho_s}{s} = Max\left(\frac{\rho_0 - \rho_1}{1}, \frac{\rho_0 - \rho_2}{2}, \dots, \frac{\rho_0 - \rho_n}{n}\right),$$

wo also s so zu wählen ist, dass jener Quotient möglichst gross ist. Für diese speciellen Wurzeln höchster Ordnung gilt daher der Satz:

Für die Reihen $e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0} + \dots$ höchster Ordnung, welche die Gleichung $f(z) = 0$ in der Umgebung der Stelle $\xi = \eta = 0$ befriedigen, ist $\varepsilon_0 = \frac{\rho_0 - \rho_s}{s}$, wo s so zu wählen ist, dass ε_0 möglichst gross ausfällt, und der Coefficient e_0 ist eine der s Wurzeln der Gleichung s^{ten} Grades:

$$\varphi_0(e_0) = a_s(\xi)e_0^s + \dots + a_k(\xi)e_0^k + a_h(\xi)e_0^h + \dots + a_0(\xi) = 0$$

wo $a_s \ldots a_k, a_h \ldots a_0$ die Anfangsglieder von denjenigen Gleichungscoefficienten $A_s \ldots A_k, A_h \ldots A_0$ sind, für welche die Quotienten

$$\frac{\rho_0 - \rho_s}{s} = \ldots = \frac{\rho_0 - \rho_k}{k} = \frac{\rho_0 - \rho_h}{h} = \ldots = \varepsilon_0$$

ebenfalls gleich ε_0 sind.

§ 7. *Berechnung einer Gleichungswurzel aus ihrem Anfangsgliede.*

Es sei nun $e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0}$ das Anfangsglied einer der s Wurzeln höchster Ordnung der Gleichung $f(z) = 0$; es sollen jetzt alle folgenden Glieder jener Wurzel gefunden werden. Zu diesem Zwecke ersetzen wir z durch die neue Variable z_1, welche durch die Gleichung:

(1) $$z = e_0\eta^{\varepsilon_0} + z_1$$

mit z zusammenhängt, dann ist also:

(1′) $$z_1 = e_1\eta^{\varepsilon_1} + e_2\eta^{\varepsilon_2} + \ldots$$

das Aggregat der noch unbekannten folgenden Glieder unserer Reihe. Die neue Unbekannte ist dann die Wurzel der Gleichung n^{ten} Grades:

$$f_1(z_1) = f(e_0\eta^{\varepsilon_0} + z_1) = f(e_0\eta^{\varepsilon_0}) + z_1\frac{f'(e_0\eta^{\varepsilon_0})}{\underline{|1}} + z_1^2\frac{f''(e_0\eta^{\varepsilon_0})}{\underline{|2}} + \ldots + z_1^n\frac{f^{(n)}(e_0\eta^{\varepsilon_0})}{\underline{|n}} = 0,$$

d. h. z_1 genügt als Function von ξ und η betrachtet einer Gleichung:

(2) $$f_1(z_1) = A_0'(\xi\eta) + A_1'(\xi\eta)z_1 + \ldots + A_n'(\xi\eta)z_1^n = 0,$$

in welcher allgemein:

$$A_k'(\xi\eta) = \frac{f^{(k)}(e_0\eta^{\varepsilon_0})}{\underline{|k}}$$

ist.

Hier ist nun wieder

$$z_1 = e_1(\xi)\eta^{\varepsilon_1} + e_2(\xi)\eta^{\varepsilon_2} + \ldots$$

so zu bestimmen, dass in der Entwickelung von

$$f_1(z_1) = f_1(e_1\eta^{\varepsilon_1} + \ldots) = B_0'(\xi)\eta^{\gamma_0'} + \ldots$$

nach Potenzen von η alle Coefficienten $B'_0(\xi), \ldots$ der Potenzen von η der Reihe nach verschwinden; hierzu muss zunächst wieder der Exponent ε_1 und der Coefficient $e_1(\xi)$ des Anfangsgliedes so bestimmt werden, dass sich das Anfangsglied $B'_0(\xi)$ auf Null reducirt, und diese Bestimmung kann offenbar wörtlich ebenso gemacht werden wie dies im vorigen Abschnitte für $e_0(\xi)$ und ε_0 angegeben wurde.

Um diese Aufgabe zu lösen, denke ich mir die neuen Gleichungscoefficienten $A'_k(\xi\eta)$ nach Potenzen von η entwickelt, und es sei:

$$A'_k(\xi\eta) = a'_k(\xi)\eta^{\rho'_k} + \ldots, \qquad (k=0,1,\ldots,n) \tag{3}$$

so dass also allgemein A'_k die Ordnungszahl ρ'_k in Bezug auf η besitzt, und ich construire nun die Punktreihe $\mathfrak{A}'_0\mathfrak{A}'_1\ldots\mathfrak{A}'_n$ welche die Coordinaten $(0, \rho'_0), (1, \rho'_1), \ldots, (n, \rho'_n)$ besitzen. Begrenzt man diese Punkte wieder von $\mathfrak{A}'_n$ ausgehend nach unten durch ein convexes Sehnenpolygon, so muss ε_1 notwendig die Steigung einer jener Begrenzungssehnen sein. Soll ferner die Ordnungszahl ε_1 von z_0 ebenfalls möglichst gross sein, so muss für ε_1 die Steigung der *letzten* Begrenzungssehne gewählt werden. Wir wollen auch hier diese weitere Bedingung einführen, da es nur auf die Bestimmung *einer* Wurzel ankommt. Nach dem am Schlusse des vorigen Abschnittes bewiesenen Satze ergiebt sich dann für den Exponent ε_1 die Bestimmung

$$\varepsilon_1 = \frac{\rho'_0 - \rho'_{s_1}}{s_1} = Max\left(\frac{\rho'_0 - \rho'_1}{1}, \frac{\rho'_0 - \rho'_2}{2}, \ldots, \frac{\rho'_0 - \rho'_n}{n}\right),$$

wo s_1 also so zu wählen ist, dass jener Quotient so gross als möglich ausfällt, und der zugehörige Coefficient $e_1(\xi)$ ist eine der s_1 Wurzeln der Gleichung s_1^{ten} Grades:

$$\varphi_1(e) = a'_{s_1}(\xi)e_1^{s_1} + \ldots + a'_i(\xi)e_1^i + \ldots + a'_0(\xi) = 0,$$

wo $a'_s(\xi)\ldots a'_i(\xi)\ldots a'_0(\xi)$ die Anfangsglieder von allen und nur den Coefficienten $\ldots A'_i \ldots$ sind, für welche die zugehörigen Punkte $\mathfrak{A}'_{s_1}\ldots\mathfrak{A}'_i\ldots\mathfrak{A}'_0$ auf der letzten Begrenzungssehne dieses zweiten Diagrammes liegen.

In derselben Weise fortfahrend kann man nun beliebig viele Glieder jener Reihe berechnen. Man müsste jetzt nachdem das Glied $e_1(\xi)\eta^{\varepsilon_1}$ bestimmt ist, statt z_1 die neue Unbekannte z_2 durch die Gleichung:

$$z_1 = e_1(\xi)\eta^{\varepsilon_1} + z_2$$

bestimmen; dann genügt z_2 der Gleichung n^{ten} Grades:

$$f_2(z_2) = f_1(e_1\eta^{\varepsilon_1} + z_2) = A_0''(\xi\eta) + A_1''(\xi\eta)z_2 + \ldots + A_n''(\xi\eta)z_2^n = 0$$

und das Anfangsglied $e_2(\xi)\eta^{\varepsilon_2}$ von z_2 kann aus dieser Gleichung genau wie vorher angegeben wurde, berechnet werden u. s. f.

Auf diese Weise erhält man eine Reihe:

$$z_0 = e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0} + e_1(\xi)\eta^{\varepsilon_1} + \ldots,$$

deren Glieder durch ein wohl definirtes Verfahren beliebig weit berechnet werden können. Wir werden jetzt beweisen, dass diese Reihe nach steigenden ganzen oder gebrochenen Potenzen von η fortschreitet, dass sie in einer endlichen Umgebung der Nullstelle gleichmässig convergirt, und in dieser eine Wurzel der vorgelegten Gleichung darstellt.

§ 8. *Die gefundene Reihe z_0 schreitet nach steigenden Potenzen von η fort.*

Ich zeige zunächst, dass die im vorigen Abschnitt bestimmte Reihe $z_0 = e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0} + e_1(\xi)\eta^{\varepsilon_1} + \ldots$ in der That nach wachsenden Potenzen von η fortschreitet, dass also stets $\varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \ldots$ ist. Da aber allgemein der Exponent ε_{k+1} auf genau dieselbe Art aus ε_k hervorgeht wie ε_1 aus ε_0 bestimmt wurde, so braucht nur der Beweis geführt zu werden, dass $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$ ist. Hierzu führt nun die folgende principiell wichtige Überlegung, mit deren Hülfe nicht nur diese specielle, sondern auch alle anderen hier sich darbietenden Fragen über jene Reihe, ausgenommen die nach ihrer Convergenz, beantwortet werden können.

Der Gleichmässigkeit wegen werde die im vorigen Abschnitte in der Gleichung $\varepsilon_0 = \frac{\rho_0 - \rho_s}{s}$ eingeführte Zahl s im Folgenden mit s_0 bezeichnet, es sei also: $\varepsilon_0 = \frac{\rho_0 - \rho_{s_0}}{s_0}$ die Ordnung des Anfangsgliedes unserer Reihe, und

$$\varphi_0(e) = a_{s_0}(\xi)e^{s_0} + \ldots + a_0(\xi)$$

die linke Seite der Gleichung s_0^{ten} Grades, deren Wurzel der Anfangscoefficient e_0 ist. Setzt man dann in $f(z)$ $z = e\eta^{\varepsilon_0}$, wo e eine Unbestimmte

bedeutet, so beginnt die Entwickelung von $f(e\eta^{\varepsilon_0})$ nach Potenzen von η mit $\varphi_0(e)\eta^{\rho_0}$, d. h. es besteht für ein variables e die Gleichung:

$$(1) \qquad f(e\eta^{\varepsilon_0}) = \varphi_0(e)\eta^{\rho_0} + \psi_0(e, \eta)\eta^{\bar\rho_0}$$

wo $\bar\rho_0 > \rho_0$ ist.

Setzt man in dieser Identität

$$e = e_0 + \frac{z_1}{\eta^{\varepsilon_0}}$$

so wird ihre linke Seite:

$$(1') \qquad f(e_0\eta^{\varepsilon_0} + z_1) = f_1(z_1) = A'_0(\xi\eta) + A'_1(\xi\eta)z_1 + \dots + A'_n(\xi\eta)z_1^n,$$

d. h. durch jene Substitution geht die linke also auch die rechte Seite von (1) in die Gleichung $f_1(z_1)$ über, deren Wurzel $z_1 = e_1\eta^{\varepsilon_1} + \dots$ ist. Diese Gleichung liefert daher auch eine directe Bestimmung der Ordnungszahlen ρ'_k, welche die Gleichungscoefficienten $A'_k(\xi\eta)$ in $f_1(z_1)$ besitzen; entwickelt man nämlich in der aus (1) und (1') folgenden Gleichung:

$$f_1(z_1) = \eta^{\rho_0}\varphi_0\left(e_0 + \frac{z_1}{\eta^{\varepsilon_0}}\right) + \eta^{\bar\rho_0}\psi_0\left(e_0 + \frac{z_1}{\eta^{\varepsilon_0}}, \eta\right)$$

die rechte Seite mit Hülfe des Taylor'schen Satzes nach Potenzen von z_1, so folgt:

$$f_1(z_1) = \eta^{\rho_0}\left(\varphi_0(e_0) + \varphi'_0(e_0)\frac{z_1}{\eta^{\varepsilon_0}} + \frac{\varphi''_0(e_0)}{\underline{|2}}\cdot\frac{z_1^2}{\eta^{2\varepsilon_0}} + \dots\right)$$
$$+ \eta^{\bar\rho_0}\left(\psi_0(e_0, \eta) + \psi'_0(e_0, \eta)\frac{z_1}{\eta^{\varepsilon_0}} + \dots\right);$$

man erhält also durch Coefficientenvergleichung für die $(n+1)$ Gleichungscoefficienten $A'_k(\xi\eta)$ die folgenden Entwickelungen nach Potenzen von η:

$$A'_k(\xi\eta) = \eta^{\rho_0 - k\varepsilon_0}\frac{\varphi_0^{(k)}(e_0)}{\underline{|k}} + \eta^{\bar\rho_0 - k\varepsilon_0}\frac{\psi_0^{(k)}(e_0, \eta)}{\underline{|k}}.$$

Da aber $\bar\rho_0 > \rho_0$ war, so folgt, dass die Ordnung ρ'_k von $A'_k(\xi\eta)$ stets und nur dann gleich $\rho_0 - k\varepsilon_0$ ist, wenn $\varphi_0^{(k)}(e_0) \neq 0$, im entgegengesetzten Falle aber sicher grösser als $\rho_0 - k\varepsilon_0$ ist. Man kann also für jeden Werth von k

$$(2) \qquad \rho'_k = \rho_0 - k\varepsilon_0 + \delta_k \qquad (k=0, 1, \dots, n)$$

setzen, wo δ_k nur dann verschwindet, wenn $\varphi_0^{(k)}(e_0) \neq 0$ ist, sonst aber stets einen positiven Werth hat.

Die Reihe e_0 ist nun eine der s_0 Wurzeln der Gleichung $\varphi_0(e_0) = 0$; um gleich die allgemeinste Annahme zu machen, werde vorausgesetzt, dass e_0 eine λ_0-fache Wurzel derselben, dass also:

$$\varphi_0(e_0) = (e - e_0)^{\lambda_0}\overline{\varphi}_0(e_0)$$

ist, wo jetzt $\overline{\varphi}_0(e_0) \neq 0$ ist. Alsdann verschwinden bekanntlich die λ_0 ersten Ableitungen:

$$\varphi_0(e)\,,\, \varphi_0'(e)\,,\, \varphi_0''(e)\,, \ldots,\, \varphi_0^{(\lambda_0 - 1)}(e)$$

für $e = e_0$ während $\varphi_0^{(\lambda_0)}(e_0)$ sicher nicht verschwindet. Daraus folgt, dass in der obigen Gleichung (2) die λ_0 ersten Zahlen $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{\lambda_0 - 1}$ sicher positiv, δ_{λ_0} aber sicher gleich Null ist, dass also

$$\rho_{\lambda_0}' = \rho_0 - \lambda_0 \varepsilon_0 \tag{2'}$$

ist.

Mit Hülfe dieses Resultates kann nun leicht bewiesen werden, dass $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$ ist. In der That war:

$$\varepsilon_1 = \frac{\rho_0' - \rho_{s_1}'}{s_1} = Max\left(\frac{\rho_0' - \rho_1'}{1}\,,\, \frac{\rho_0' - \rho_2'}{2}\,, \ldots,\, \frac{\rho_0' - \rho_n'}{n}\right).$$

Nun ist aber allgemein wegen (2)

$$\frac{\rho_0' - \rho_k'}{k} = \frac{(\rho_0 + \delta_0) - (\rho_0 - k\varepsilon_0 + \delta_k)}{k} = \varepsilon_0 + \frac{\delta_0 - \delta_k}{k}$$

also:

$$\varepsilon_1 = Max\left(\ldots \varepsilon_0 + \frac{\delta_0 - \delta_k}{k} \ldots\right) = \varepsilon_0 + Max\left(\frac{\delta_0 - \delta_1}{1}\,,\, \frac{\delta_0 - \delta_2}{2}, \ldots\right),$$

und von jenen n Brüchen ist mindestens einer, nämlich $\frac{\delta_0 - \delta_{\lambda_0}}{\lambda_0} = \frac{\delta_0}{\lambda_0}$ positiv, also ist sicher:

$$\varepsilon_1 \geqq \varepsilon_0 + \frac{\delta_0}{\lambda_0} > \varepsilon_0,$$

und hiermit ist jener Beweis vollständig erbracht, d. h. es ist erwiesen, dass jene Reihe nach steigenden Potenzen von η fortschreitet.

§ 9. *Theilung der Reihe z_0 in ihren regulären und irregulären Theil.*

Aus denselben Betrachtungen folgt aber jetzt ein weit wichtigeres Resultat für unsere Reihe z_0.

Der erste Coefficient e_0 war eine λ_0-fache Wurzel der ersten Coefficientengleichung $\varphi_0(e) = 0$ vom Grade s_0. Ganz ebenso ist die zweite Coefficientengleichung

$$\varphi_1(e) = 0$$

vom Grade s_1. Wir führen jetzt den wichtigen Nachweis, dass stets $s_1 \leqq s_0$ ist, und zwar zeigen wir gleich die Richtigkeit des folgenden sehr viel tiefer gehenden Satzes:

> Der Grad s_1 der zweiten Coefficientengleichung $\varphi_1(e) = 0$ ist höchstens gleich der Zahl λ_0 welche den Grad der Vielfachheit der Wurzel e_0 in der ersten Coefficientengleichung angiebt.

Jener Grad s_1 ist nämlich die grösste Zahl, für welche der Quotient

$$\frac{\rho'_0 - \rho'_k}{k} = \varepsilon_0 + \frac{\delta_0 - \delta_k}{k}$$

möglichst gross ausfällt. Hieraus folgt aber leicht, dass s_1 nicht grösser als λ_0 sein kann. Ist nämlich $k > \lambda_0$ so ist

$$\frac{\delta_0 - \delta_k}{k} < \frac{\delta_0 - \delta_k}{\lambda_0} \leqq \frac{\delta_0}{\lambda_0} = \frac{\delta_0 - \delta_{\lambda_0}}{\lambda_0}$$

weil $k > \lambda_0$, $\delta_k \geqq 0$, und $\delta_{\lambda_0} = 0$ ist; es ist also stets

$$\frac{\rho'_0 - \rho'_k}{k} < \frac{\rho'_0 - \rho'_{\lambda_0}}{\lambda_0},$$

d. h. der Grad s_1 der zweiten Coefficientengleichung muss eine der Zahlen $1, 2, \ldots, \lambda_0$ sein, w. z. b. w.

Sind jetzt $\varphi_0(e) = 0$, $\varphi_1(e) = 0$, $\varphi_2(e) = 0, \ldots$ die erste, zweite, dritte, ... Coefficientengleichung für unsere Reihe, und sind $e_0, e_1, e_2, \ldots$ bzw.

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$-fache Wurzeln jenerGlei chungen u. s. w., so kann man ihre linken Seiten folgendermassen schreiben:

$$\varphi_0(e) = (e - e_0)^{\lambda_0}\overline{\varphi}_0(e),$$
$$\varphi_1(e) = (e - e_1)^{\lambda_1}\overline{\varphi}_1(e),$$
$$\varphi_2(e) = (e - e_2)^{\lambda_2}\overline{\varphi}_2(e),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

wo allgemein $\overline{\varphi}_k(e)$ die Wurzel $e = e_k$ nicht mehr enthält. Sind endlich $s_0, s_1, s_2, \ldots$ die Grade jener Gleichungen, so folgt aus dem soeben bewiesenen Satze, dass:

$$s_1 \leqq \lambda_0 \leqq s_0,$$
$$s_2 \leqq \lambda_1 \leqq s_1,$$
$$\cdots\cdots$$

und es zeigt sich so, dass für eine beliebige $k+1^{\text{te}}$ Coefficientengleichung im Allgemeinen:

$$s_{k+1} < s_k$$

ist; nur dann kann $s_{k+1} = s_k$ sein, wenn auch $\lambda_k = s_k$ ist, d. h. wenn die nächstvorhergehende Coefficientengleichung:

$$\varphi_k(e) = (e - e_k)^{s_k}$$

ist, also nur die einzige Wurzel e_k besitzt. Da somit die Grade $s_0, s_1, s_2, \ldots$ der Coefficientengleichungen, wie weit man auch gehen mag, immer abnehmen, oder gleich bleiben, so müssen von einem gewissen Gliede an alle folgenden Gleichungen von einem und demselben Grade sein. Es sei $e_\tau(\xi)^{\epsilon_\tau}$ jenes Glied und es sei

$$s = s_\tau = s_{\tau+1} = s_{\tau+2} = \ldots$$

der gemeinsame Grad aller jener Coefficientengleichungen. Nach dem soeben bewiesenen Satze besitzt dann aber jede der folgenden Gleichungen $\varphi_k(e) = 0$ nur eine einige Wurzel d. h. es ist, wie weit man auch in der Reihe z_0 gehen mag:

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} \varphi_\tau(e) &= (e - e_\tau)^s, \\ \varphi_{\tau+1}(e) &= (e - e_{\tau+1})^s, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Im folgenden Paragraphen wird bewiesen werden, dass jene Gleichungen (1) stets linear werden, d. h. dass $s = 1$ ist, falls die Gleichungsdiscriminante $D(xy)$ nicht identisch verschwindet, falls also die Gleichung $f(z, xy) = 0$ für variable x, y keine gleichen Wurzeln hat. Für die folgenden Betrachtungen können wir aber auch $s \geqq 1$ voraussetzen.

Auf das in (1) angegebene Resultat gründet sich nun eine wichtige Eintheilung der ganzen Reihe $z_0 = \sum_{i=0}^{\infty} e_i(\xi)\eta^{\varepsilon_i}$. Wir bezeichnen nämlich das Aggregat:

$$\zeta = e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0} + \dots + e_{\tau-1}(\xi)\eta^{\varepsilon_{\tau-1}}$$

der τ vor jenem Elemente $e_\tau(\xi)\eta^{\varepsilon_\tau}$ stehenden Glieder als den irregulären Theil von z_0, und die ganze übrigbleibende Reihe

$$\bar{z} = e_\tau(\xi)\eta^{\varepsilon_\tau} + e_{\tau+1}(\xi)\eta^{\varepsilon_{\tau+1}} + \dots$$

als den regulären Theil von z_0. Nach dem soeben Bewiesenen besteht dann der irreguläre Theil ζ von $z_0 = \zeta + \bar{z}$ stets aus einer endlichen Anzahl von Gliedern. Um jetzt die Fundamentaleigenschaft des regulären Theiles $\bar{z}$ zu finden, bilde ich die Gleichung $\bar{f}(\bar{z}) = 0$, der $\bar{z}$ allein genügt. Dieselbe kann folgendermassen geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\bar{f}(\bar{z}) = f(\zeta + \bar{z}) &= f(\zeta) + \bar{z}f'(\zeta) + \dots + \bar{z}^n \frac{f^{(n)}(\zeta)}{\underline{|n}} \\ &= \bar{A}_0(\xi\eta) + \bar{A}_1(\xi\eta)\bar{z} + \dots + \bar{A}_n(\xi\eta)\bar{z}^n = 0.\end{aligned}$$

Entwickelt man alle jene Coefficienten $\bar{A}_i(\xi\eta) = \frac{f^{(i)}(\zeta)}{\underline{|i}}$ nach Potenzen von η, so erhält man Reihen, welche im Allgemeinen nach gebrochenen Potenzen von η fortschreiten, denn ihre Exponenten setzen sich ganzzahlig aus den Exponenten $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\tau-1}$ zusammen; ist also b der Generalnenner jener τ Exponenten ε_i, so schreiten die Entwickelungen aller Coefficienten $\bar{A}_i$ nach *ganzen* Potenzen von $\eta^{\frac{1}{b}}$ fort. Die Ordnungszahlen $\bar{\rho}_0, \bar{\rho}_1, \dots, \bar{\rho}_n$ dieser Gleichungscoefficienten $\bar{A}_0(\xi\eta), \dots, \bar{A}_n(\xi\eta)$ sind also auch Brüche mit dem Nenner b, sie können also alle in der Form

$$\bar{\rho}_i = \frac{t_i}{b}$$

geschrieben werden, wo $t_0, t_1, \dots, t_n$ ganze Zahlen bedeuten. Die Coeffi-

cienten der einzelnen Potenzen von η sind aber algebraische Potenzreihen von ξ, welche durch die irregulären Reihencoefficienten $e_0(\xi), e_1(\xi), \ldots, e_{\tau-1}(\xi)$ rational ausdrückbar, also mit ihnen gleichverzweigt sind.

Man kann nun für alle regulären Glieder unserer Reihe die beiden folgenden Sätze aussprechen:

1) Alle regulären Exponenten $\varepsilon_\tau, \varepsilon_{\tau+1}, \ldots$ sind sämmtlich Brüche mit dem Generalnenner der τ ersten Exponenten.

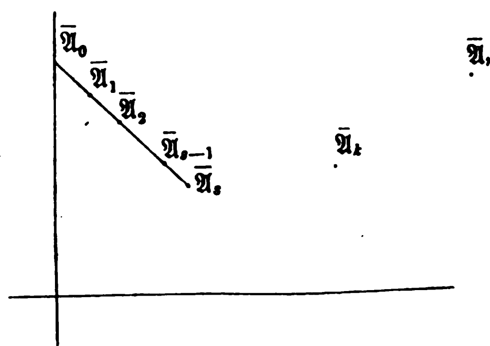
2) Alle regulären Coefficienten $e_\tau(\xi), e_{\tau+1}(\xi), \ldots$ sind sämmtlich durch die τ ersten Coefficienten rational ausdrückbar, also mit diesen gleichverzweigt.

Beide Sätze brauchen wieder nur für das erste Glied $e_\tau(\xi)\eta^{\varepsilon_\tau}$ bewiesen zu werden, da sie für alle späteren in gleicher Weise folgen. Nun ergaben sich für ε_τ und $e_\tau(\xi)$ die Bestimmungsgleichungen:

$$\varepsilon_\tau = \frac{\bar{\rho}_0 - \bar{\rho}_s}{s},$$

$$(2) \qquad \bar{\varphi}(e) = (e - e_\tau)^s = e^s - s e_\tau e^{s-1} + \frac{s(s-1)}{1.2} e_\tau^2 e^{s-2} - \ldots \pm e_\tau^s = 0.$$

Zunächst ist hier ε_τ die Steigung der letzten Begrenzungssehne $\overline{\mathfrak{A}_s\mathfrak{A}_0}$ des zugehörigen Diagrammes, und in $\bar{\varphi}(e)$ treten die Anfangsglieder von allen



und nur den Gliedern $\bar{A}_0(\xi\eta), \bar{A}_1(\xi\eta), \ldots$ auf, für welche die zugehörigen Punkte $\bar{\mathfrak{A}}_0, \bar{\mathfrak{A}}_1, \ldots$ auf und nicht über $\overline{\mathfrak{A}_s\mathfrak{A}_0}$ liegen. Nun treten aber in $\bar{\varphi}(e)$ in (1) *alle* Glieder mit von Null verschiedenen Coefficienten auf; es liegen also *alle* Punkte $\bar{\mathfrak{A}}_1, \bar{\mathfrak{A}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{A}}_{s-1}$ auf jener Begrenzungssehne,

und ihre Steigung ε_τ stimmt also auch mit der Steigung von $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_0}$ überein, es ergiebt sich also in diesem Falle für jene Steigung ε_τ der einfachere Ausdruck:

$$\varepsilon_\tau = \frac{\bar{\rho}_0 - \bar{\rho}_1}{1} = \frac{t_0 - t_1}{b}$$

d. h. auch ε_τ ist ein Bruch mit demselben Nenner b, w. z. b. w.

Zweitens sind alle Coefficienten von $\bar{\varphi}(e) = (e - e_\tau)^s = e^s - se^{s-1}e_\tau + \dots$ die Anfangsglieder der Entwickelungen der zugehörigen Coefficienten A_0, $A_1, \dots, A_s$, also durch $e_0(\xi), e_1(\xi), \dots, e_{\tau-1}(\xi)$ rational ausdrückbar. Also ist auch speciell $se_\tau(\xi)$, der Coefficient von e^{s-1}, ebenfalls rational durch $e_0(\xi) \dots e_{\tau-1}(\xi)$ ausdrückbar, also gilt das Gleiche für $e^\tau(\xi)$ selbst, und damit ist auch der zweite Theil unserer Behauptung erwiesen.

Man erhält also das wichtige Resultat, dass die durch unser Verfahren bestimmte Reihe $e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0} + \dots$ nach steigenden *ganzzahligen* Potenzen von $\eta^{\frac{1}{b}}$ fortschreitet, wo b eine bestimmte ganze Zahl bedeutet, welche sich aus der Natur der zu Grunde gelegten Curve $\eta = y - y_0$ von selbst ergiebt.

Ersetzen wir wieder η und ξ bzw. durch $y - y_0$ und $(x - \alpha)^{\frac{1}{a}}$ so ergiebt sich der folgende Ausdruck für unsere Reihe:

$$z_0 = e_h(x \mid \alpha)(y - y_0)^{\frac{h}{b}} + e_{h+1}(x \mid \alpha)(y - y_0)^{\frac{h+1}{b}} + \dots,$$

und die Coefficienten sind algebraische Potenzreihen von $x - \alpha$ welche ebenfalls nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von $x - \alpha$ fortschreiten.

Aus der Untersuchung des s. g. regulären Falles im § 4 ergiebt sich, dass für alle Curven, welche nicht Theile der Discriminantencurve sind, stets $b = 1$ ist, denn für alle diese Curven schritten ja die sämmtlichen n Reihen für die Wurzeln von $f(z) = 0$ nach *ganzen* Potenzen von $y - y_0$ fort. Für die Discriminantencurven können aber einige von den Wurzeln nach gebrochenen Potenzen von $y - y_0$ fortschreiten, und gerade diese Entwickelungen sind hier von besonderer Bedeutung, da sie denjenigen in der Umgebung eines Verzweigungspunktes in der Theorie der Functionen einer Variablen entsprechen.

Die Reihe $z_0 = \sum_{k=h}^{\infty} e_k(x \mid \alpha)(y - y_0)^{\frac{k}{b}}$ befriedigt nun die Gleichung $f(z, xy) = 0$ *formal;* setzt man nämlich diese Reihe für z in $f(z)$ ein, und

entwickelt die so gefundene Function ebenfalls nach Potenzen von $y - y_0$, so fallen die Coefficienten der einzelnen Potenzen von $y - y_0$ fort, d. h. die linke Seite beginnt mit einer beliebig hohen Potenz von $y - y_0$, wenn man in jener Reihe für z von vorn herein genügend viele Glieder berücksichtigt. In der That sei:

$$z_l = e_h(x\,|\,a)(y - y_0)^{\frac{h}{b}} + \ldots + e_l(x\,|\,a)(y - y_0)^{\frac{l}{b}}$$

das Aggregat der $(l + 1) - h$ ersten Glieder jener Reihe; dann ist, wie oben gezeigt wurde, die Ordnungszahl von $f(z_l)$ gleich $\rho_0^{(l)}$ und $\rho_0^{(l)}$ ist ebenfalls ein Bruch $\frac{t_l}{b}$ mit dem Nenner b. Bildet man nun die Ordnungszahlen $\rho_0^{(h)}, \rho_0^{(h+1)}, \rho_0^{(h+2)}, \ldots$ von $f(z_h), f(z_{h+1}), f(z_{h+2}), \ldots$ so erhält man eine Reihe von Brüchen mit dem Nenner b

$$\frac{t_h}{b}, \frac{t_{h+1}}{b}, \frac{t_{h+2}}{b}, \ldots;$$

beachtet man dabei, dass nachdem a. S. 378 N° (2) gegebenen Beweise jene Ordnungszahlen eine wachsende Reihe bilden, so folgt, dass auch von den *ganzen* Zahlen $t_h, t_{h+1}, \ldots$ jede folgende grösser ist als die vorhergehende, dass somit diese, also auch die Zahlen $\rho_0^{(l)}$, zuletzt über jedes Mass hinaus wachsen, und damit ist gezeigt, dass die gefundene Reihe in der That die vorgelegte Gleichung formal befriedigt.

§ 10. *Die n Congruenzwurzeln der Congruenz* $f(z) \equiv 0$.

Im vorigen Abschnitt ist bewiesen worden, dass für jede Gleichung $f(z, xy) = 0$ mindestens eine nach Potenzen von $(y - y_0)$ fortschreitende Reihe $z_0 = \mathfrak{P}(y\,|\,y_0)$ existirt, durch welche sie formal befriedigt wird. Wir wollen zunächst nachweisen, dass die Anzahl der Potenzreihen $\mathfrak{P}(y\,|\,y_0)$ welche die gleiche Eigenschaft besitzen stets gleich dem Grade jener Gleichung ist; erst dann können wir weiter den Beweis erbringen, dass jene n Reihen in einem endlichen Bereiche gleichmässig convergiren, und hier die n Wurzeln der Gleichung darstellen.

Zu diesem Zwecke spreche ich die Beziehung der vorher gefundenen Reihe $z_0 = \mathfrak{P}(y\,|\,y_0)$ zu der Function $f(z, xy)$ in einer mehr arithmetischen Form aus.

Wählt man statt jener ganzen Reihe, nur einen beliebigen Theil

$$z_l = e_h(x\,|\,\alpha)(y - y_0)^{\frac{h}{b}} + \dots + e_l(x\,|\,\alpha)(y - y_0)^{\frac{l}{b}}$$

und substituirt diesen in $f(z, xy)$ so wird $f(z_l, xy)$ durch eine ganz bestimmte Potenz $(y - y_0)^{m_l}$ theilbar, d. h. es ist:

$$f(z_l) = (y - y_0)^{m_l} G(y\,|\,y_0),$$

wo $G(y\,|\,y_0)$ eine *ganze* Function von $y - y_0$ bedeutet. Wir sagen daher: z_l ist eine Wurzel der Congruenz:

$$(1) \qquad f(z) \equiv 0 \pmod{(y - y_0)^{m_l}},$$

den Congruenzbegriff genau in dem in der Arithmetik gebräuchlichen Sinne aufgefasst. Lassen wir nun l grösser und grösser werden, so wächst m_l ebenfalls mehr und mehr, und kann grösser als jede noch so grosse Zahl gemacht werden. Jene Reihe z_0 kann demnach als Wurzel der Congruenz:

$$f(z) \equiv 0 \pmod{(y - y_0)^{M}}$$

definirt werden, wenn M eine beliebig gross anzunehmende Zahl bedeutet.

Wir wollen die in den vorigen Abschnitten gefundene Reihe

$$z_0 = \sum_{k=h}^{\infty} e_k(x\,|\,\alpha)(y - y_0)^{\frac{k}{b}}$$

nunmehr durch z_1 bezeichnen; dann kann jenes bisher gefundene Resultat jetzt folgendermassen ausgesprochen werden:

Jede Congruenz:

$$(2) \qquad f(z) \equiv 0 \pmod{(y - y_0)^{M_1}}$$

für eine beliebig hohe Potenz von $(y - y_0)$ als Modul besitzt mindestens eine Congruenzwurzel

$$z_1 = \Sigma e_k(x\,|\,\alpha)(y - y_0)^{\frac{k}{b}}.$$

Der Beweis nun, dass jene Congruenz genau n Wurzeln besitzt, gründet sich auf den Hülfssatz:

Ist $z = z_1$ eine Wurzel der Congruenz (2), so ist $f(z)$ modulo $(y - y_0)^{M_1}$ durch den zugehörigen Linearfactor $z - z_1$ theilbar, d. h. es ist:

$$(2') \qquad f(z) \equiv (z - z_1) f_1(z) \mod (y - y_0)^{M_1}.$$

In der That, ist $f(z_1)$ durch $(y - y_0)^{M_1}$ theilbar, so ist:

$$(3) \qquad f(z) \equiv f(z) - f(z_1) = (z - z_1) f_1(z) \mod (y - y_0)^{M_1}$$

wo

$$f_1(z) = \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} = B_{n-1}(x, y) z^{n-1} + \ldots + B_0(xy)$$

eine ganze Function $(n - 1)^{\text{ten}}$ Grades von z mit rationalen Functionen von x, y, y_0 als Coefficienten ist.

Auch für die Function $f_1(z)$ kann man nun durch unsere Methode eine Reihe z_2 bestimmen, welche nach Potenzen von $y - y_0$ fortschreitet und die Gleichung $f_1(z) = 0$ formal befriedigt. Nach dem soeben bewiesenen Satze ergiebt sich so für $f_1(z)$ die folgende Congruenz:

$$f_1(z) \equiv (z - z_2) f_2(z) \mod (y - y_0)^{M_2},$$

wo $f_2(z)$ eine ganze Function $(n - 2)^{\text{ten}}$ Grades und M_2 eine beliebig grosse Zahl bedeutet, und diese Congruenz vertritt eine Gleichung:

$$f_1(z) = (z - z_2) f_2(z) + (y - y_0)^{M_2} G_2(z, y).$$

Setzt man diesen Werth von $f_1(z)$ in (3) ein, so folgt:

$$f(z) \equiv (z - z_1)(z - z_2) f_2(z) + (z - z_1)(y - y_0)^{M_2} G_2(z, y) \mod (y - y_0)^{M_1}.$$

Wählt man endlich die ganz beliebige Zahl M_2 so gross, dass das zweite Glied durch $(y - y_0)^{M_1}$ theilbar ist, so ergiebt sich die Congruenz:

$$f(z) \equiv (z - z_1)(z - z_2) f_2(z) \mod (y - y_0)^{M_1}.$$

In derselben Weise kann man weiter schliessen: man bestimmt jetzt eine Wurzel z_3 von $f_2(z) \equiv 0$ u. s. w. und gelangt so zuletzt zu der für eine beliebig hohe Potenz $(y - y_0)^M$ gültigen Congruenz:

$$(4) \qquad f(z) \equiv A(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n) \mod (y - y_0)^M,$$

wo A eine Function nullten Grade in z ist, welche sich durch Coefficientenvergleichung gleich $A_n(x, y)$ bestimmt. Aus dieser Congruenz folgt zunächst, dass $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sämmtlich ebenso wie z_1 Congruenzwurzeln von $f(z) \equiv 0$ sind, denn für $z = z_i$ wird die rechte Seite, also auch die linke Seite $f(z_i)$ durch $(y - y_0)^M$ theilbar, wo M beliebig gross angenommen werden kann.

Ebenso leicht erkennt man aber, dass keine andere Reihe z_0 eine Wurzel von $f(z) \equiv 0$ sein kann. Substituirt man nämlich $z = z_0$ in (4), so müsste:

$$f(z_0) \equiv A(z_0 - z_1)(z_0 - z_2) \ldots (z_0 - z_n) \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\, (y - y_0)^M$$

sein; aber jenes Product von $(n + 1)$ Factoren kann nur dann durch eine *beliebig hohe* Potenz von $(y - y_0)$ theilbar sein, wenn mindestens einer seiner Factoren eine beliebig hohe Potenz dieses Linearfactors enthält und dies ist wiederum nur dann der Fall, wenn entweder $A = 0$ ist, oder wenn z_0 einer der n Reihen $z_1, \ldots, z_n$ gleich ist.

Der Einfachheit wegen denken wir uns von vorn herein den Coefficienten $A_n(xy)$ von z^n durch Division zu Eins gemacht. Denkt man sich dann in der soeben gefundenen Congruenz:

$$z^n + A_{n-1}(xy)z^{n-1} + \ldots + A_0(xy) \equiv (z - z_1) \ldots (z - z_n) \ \mathrm{mod}\, (y - y_0)^M$$

die Coefficienten der einzelnen Potenzen von z auf beiden Seiten verglichen, so ergiebt sich, dass die aus den n Potenzreihen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ gebildeten elementaren symmetrischen Functionen den Gleichungscoefficienten gleich sind, abgesehen von einer beliebig hohen Potenz von $(y - y_0)^M$. Hieraus folgt weiter dass überhaupt jede symmetrische Function der n Wurzeln einer bestimmten rationalen Function von x und y congruent ist.

Speciell nennen wir auch hier das Product $z_1 z_2 \ldots z_n$ aller n Wurzeln *die Norm von z* und bezeichnen dasselbe durch $N(z)$. Dann ergiebt sich für diese Function die bekannte Gleichung:

$$N(z) = (-1)^n A_0(xy);$$

jene Norm stimmt also abgesehen vom Vorzeichen mit dem von z freien Gliede der Gleichung $f(z) = 0$ überein.

Aus diesen Thatsachen ziehen wir zunächst die Folgerung dass jene n Congruenzwurzeln $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sicher von einander verschieden, sind,

wenn die *Gleichung* $f(z) = 0$ lauter verschiedene Wurzeln besitzt. Wären nämlich zwei jener Reihen gleich, so wäre das Differenzenproduct

$$D(z_1 \dots z_n) = \prod_{i \gtrless k} (z_i - z_k)$$

identisch Null; nach dem soeben bewiesenen Satze ist aber diese symmetrische Function $D(z_1 \dots z_n)$ modulo $(y - y_0)^M$ der Discriminante $D(xy)$ der Gleichung $f(z) = 0$ congruent, und diese müsste daher ebenfalls durch jede noch so hohe Potenz $(y - y_0)^M$ von $y - y_0$ theilbar sein, was nur dann möglich ist, wenn $D(x, y) = 0$ ist, wenn also die betrachtete Gleichung gleiche Wurzeln besitzt.

Zweitens wollen wir aus diesem Satze ein bereits vorher angekündigtes wichtiges Resultat ableiten: Ist

$$z_1 = e_h(z)\eta^{\varepsilon_h} + e_{h+1}(\xi)\eta^{\varepsilon_{h+1}} + \dots$$

die Reihe für eine der n Wurzeln, so genügte jeder Coefficient $e_k(\xi)$ einer Gleichung $\varphi_k(e) = 0$; die Grade dieser Gleichungen bildeten eine abnehmenden Reihe und von einem Gliede $e_\tau \eta^{\varepsilon_\tau}$ an sind alle folgenden Gleichungen $\varphi_\tau(e) = 0$, $\varphi_{\tau+1}(e) = 0$, ... von gleichem Grade s und jede ist die s^{te} Potenz eines Linearfactors.

Wir zeigen jetzt dass, falls die *Gleichung* $f(z) = 0$ keine gleichen Wurzeln hat, wie wir dies schon früher voraussetzten, stets $s = 1$ ist, dass also alle regulären Coefficienten einfach durch lineare Gleichungen bestimmt werden. Ist nämlich:

$$z^{(r)} = e_h(\xi)\eta^{\varepsilon_h} + \dots + e_r(\xi)\eta^{\varepsilon_r}$$

das Aggregat der Anfangsglieder von z_1 und ist r schon so gross gewählt, dass $f(z^{(r)})$ bereits von sehr hoher Ordnung ist, dann ist

$$z = z^{(r)} + \bar{z}, \qquad \bar{z} = e_{r+1}(\xi)\eta^{r+1} + \dots$$

und $\bar{z}$ ist eine Wurzel der Gleichung n^{ten} Grades

$$f(z^{(r)} + \bar{z}) = f(z^{(r)}) + f'(z^{(r)})\bar{z} + \frac{f''(z^{(r)})}{\underline{|2}}\bar{z}^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z^{(r)})}{\underline{|n}}\bar{z}^n;$$

der Exponent ε_{r+1} des folgenden Gliedes ist durch die Gleichung bestimmt:

$$\varepsilon_{r+1} = Max\left(\frac{\bar{\rho}_0 - \bar{\rho}_1}{1}, \frac{\bar{\rho}_0 - \bar{\rho}_2}{2}, \dots, \frac{\bar{\rho}_0 - \bar{\rho}_n}{n}\right)$$

wenn $\bar{\rho}_0, \bar{\rho}_1, \ldots, \bar{\rho}_n$ die Ordnungszahlen von $f(z^{(r)}), f'(z^{(r)}), \ldots$ bedeuten. Nun kann die Ordnungszahl $\bar{\rho}_0$ beliebig gross angenommen werden, wenn r genügend gross gewählt wird, dagegen bleibt die Ordnungszahl $\bar{\rho}_1$ von $f'(z^{(r)})$ unterhalb einer endlichen Grenze, wie gross auch r angenommen werde, denn sonst wäre ja $f'(z_1)$ selbst von beliebig hoher Ordnung, und das Gleiche wäre für das Product

$$f'(z_1)f(z_2)\ldots f'(z_n) = D(xy)$$

der Fall, d. h. es wäre die Discriminante identisch Null. Hieraus folgt in der That, dass r so gross angenommen werden kann, dass:

$$\bar{\rho}_0 - \bar{\rho}_1 > \left(\frac{\bar{\rho}_0 - \bar{\rho}_2}{2}, \ldots, \frac{\bar{\rho}_0 - \bar{\rho}_n}{n}\right)$$

ist, d. h. es ist $s = 1$, w. z. b. w.

Hieraus folgt leicht, dass für die regulären Glieder jedes folgende Glied $e_{r+1}\eta^{\varepsilon_{r+1}}$ durch die Gleichung:

$$e_{r+1}\eta^{\varepsilon_{r+1}} + \ldots = -\frac{f(z^{(r)})}{f'(z^{(r)})}$$

bestimmt ist, d. h. es ist $e_{r+1}\eta^{\varepsilon_{r+1}}$ das Anfangsglied der Entwickelung der Quotienten

$$-\frac{f(z)}{f'(z)}$$

für $z = z^{(r)}$.

§ 11. *Die n Reihen $z_1, \ldots, z_n$ stellen die Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ in der Umgebung des Zweiges l_0 dar.*

Es soll jetzt bewiesen werden, dass die n Reihen $z_1, z_2, \ldots, z_n$, welche die Gleichung $f(z) = 0$ formal befriedigen, sämmtlich innerhalb einer endlichen Umgebung der betrachteten Stelle gleichmässig convergiren und dort die Gleichungswurzeln darstellen. Diesen an sich schwierigen Beweis können wir nun fast vollständig auf den bereits im § 4 geführten Beweis für den regulären Fall reduciren, weil uns die soeben durchgeführten Untersuchungen nicht nur eine sondern alle n Congruenzwurzeln von $f(z)$ ergeben haben.

Diese n Reihen schreiten sämmtlich nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von $(x-a)$ und $(y-y_0)$ fort. Es seien a^* und b^* bzw. die Generalnenner der Exponenten von $x-a$ und $y-y_0$ in *allen* n Reihen z_i. Wir setzen dann:

$$\xi = (x-a)^{\frac{1}{a^*}}, \qquad \eta = (y-y_0)^{\frac{1}{b^*}},$$

dann gehen $z_1, \ldots, z_n$ in Potenzreihen über, welche nach *ganzen* Potenzen von ξ und η fortschreiten, und welche nach Potenzen von η geordnet folgendermassen geschrieben worden können:

$$(1) \qquad z_i = e_{r_i}(\xi)\eta^{r_i} + e_{r_i+1}(\xi)\eta^{r_i+1} + \ldots.$$

Es soll dann allgemein r_i die Ordnung der Wurzel z_i genannt werden.

Wir brauchen unseren Beweis nur für irgend eine jener n Reihen zu führen; es sei die Bezeichnung von vorn herein so gewählt, dass z_1 diejenige Reihe ist, deren Convergenz bewiesen werden soll.

Wir werden zeigen, dass diese allgemeinere Aufgabe auf den Convergenzbeweis für den regulären Fall vollständig reducirt werden kann, wenn man voraussetzen darf, dass die Ordnung r_1 der zu untersuchenden Reihe positiv ist, während die Ordnungszahlen $r_2, r_3, \ldots, r_n$ sämmtlich negativ oder höchstens Null sind. Offenbar ist diese Voraussetzung im Allgemeinen nicht erfüllt, aber man kann die vorgelegte Gleichung durch eine sehr einfache Transformation so umformen dass sie die verlangte Eigenschaft erhält.

Es sei nämlich jene Voraussetzung nicht erfüllt, und

$$z_1 = e_{r_1}(\xi)\eta^{r_1} + \ldots + e_s(\xi)\eta^s + e_{s+1}(\xi)\eta^{s+1} + \ldots$$

die Entwickelung von z_1; wir betrachten dann das Aggregat:

$$z_1^{(0)} = e_{r_1}(\xi)\eta^{r_1} + \ldots + e_s(\xi)\eta^s$$

der $(s+1)-r_1$ ersten Glieder von z_1 und wählen s beliebig, jedenfalls aber so gross dass die Aggregate der entsprechenden Anfangsglieder von $z_2, z_3, \ldots, z_n$ von $z_1^{(0)}$ verschieden sind. Dieser Bedingung kann stets genügt werden, da, wie oben bewiesen wurde, die n Reihen z_i sämmtlich von

einander verschieden sind. Jetzt führen wir in der ursprünglichen Gleichung $f(z, \xi\eta) = 0$ an Stelle von z die neue Variable:

$$(2) \qquad \bar{z} = \frac{z - z_1^{(0)}}{\eta^s}, \qquad z = z_1^{(0)} + \eta^s \bar{z}$$

ein; dieselbe genügt der Gleichung n^{ten} Grades:

$$\bar{f}(\bar{z}) = f(z_1^{(0)} + \eta^s \bar{z}) = f(z_1^{(0)}) + f'(z_1^{(0)})\eta^s \bar{z} + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_1^{(0)})}{\underline{|n}} \eta^{ns} \bar{z}^n$$
$$= \bar{A}_0(\xi\eta) + \bar{A}_1(\xi\eta)\bar{z} + \ldots + \bar{A}_n(\xi\eta)\bar{z}^n = 0,$$

und für ihre n Wurzeln $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n$ ergeben sich aus (2) unmittelbar die Ausdrücke:

$$\bar{z}_i = \frac{z_i - z_1^{(0)}}{\eta^s}.$$

Also erhält man speciell für die erste Wurzel:

$$\bar{z}_1 = \frac{z_1 - z_1^{(0)}}{\eta^s} = e_{s+1}(\xi)\eta + e_{s+2}(\xi)\eta^2 + \ldots;$$

sie ist also von positiver Ordnung und zwar ist sie abgesehen von dem Factor η^s gleich der zu untersuchenden Reihe mit Weglassung ihrer $(s + 1) - r_1$ Anfangsglieder. Von den folgenden Wurzeln ist aber keine einzige von positiver Ordnung, denn wäre dies etwa für

$$\bar{z}_2 = \frac{z_2 - z_1^{(0)}}{\eta^s}$$

der Fall so müsste ja $z_2 - z_1^{(0)}$ mindestens durch η^{s+1} theilbar sein, d. h. es wäre $z_1^{(0)}$ auch das Aggregat der Anfangsglieder von z_2, was nach der Voraussetzung nicht der Fall ist.

Ersetzt man also die ursprüngliche Gleichung $f(z) = 0$ durch die transformirte $\bar{f}(\bar{z}) = 0$, so besitzt diese die Eigenschaft, dass eine und nur eine ihrer Wurzeln $\bar{z}_1$ von positiver Ordnung ist; hat man aber bewiesen dass diese Wurzel $\bar{z}_1$ gleichmässig convergirt, so gilt dasselbe auch von der ursprünglich zu untersuchenden Reihe:

$$z_1 = z_1^{(0)} + \eta^s \bar{z}_1,$$

da sie sich von jener nur um die Summe $z_1^{(0)}$ einer endlichen Anzahl convergenter Potenzreihen von ξ unterscheidet.

Wir können und wollen daher jetzt voraussetzen, dass schon in der ursprünglichen Gleichung die zu untersuchende Wurzel z_1 die einzige von positiver Ordnung ist, dass also die n Wurzeln folgendermassen geschrieben werden können:

$$z_1 = \eta^{\rho_1}E_1(\eta), \qquad z_2 = \eta^{-\rho_2}E_2(\eta)\,, \;\ldots\,, z_n = \eta^{-\rho_n}E_n(\eta)$$

wo allgemein $E_i(\eta)$ eine Reihe von der Ordnung Null bedeutet, und wo $\rho_1 = r_1$ eine positive und $\rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_n$ nicht negative ganze Zahlen bedeuten.

Es sei jetzt:

$$f(z\,, \xi\eta) = A_0(\xi\eta) + A_1(\xi\eta)z + \ldots + A_n(\xi\eta)z^n = 0$$

die zu untersuchende Gleichung, und zwar mögen aus ihren Coefficienten die höchsten in ihnen enthaltenen Potenzen von η und ξ bereits durch Division beseitigt sein. Dann folgt aus der soeben angenommenen Beschaffenheit der Wurzeln, dass der erste Coefficient $A_0(\xi\eta)$ durch η theilbar, der zweite $A_1(\xi\eta)$ aber sicher nicht durch η theilbar ist.

In der That ist für eine beliebig hohe Potenz von η als Modul:

$$f(z) \equiv A(z - \eta^{\rho_1}E_1)(z - \eta^{-\rho_2}E_2)\ldots(z - \eta^{-\rho_n}E_n) \pmod{\eta^M},$$

wo der Factor A dadurch bestimmt ist, dass nach Ausführung der Multiplication alle Coefficienten von nicht negativer Ordnung in η sind, und mindestens einer von ihnen die Ordnung Null hat. Setzt man $A = \eta^{\rho_2+\rho_3+\ldots+\rho_n}$ so wird dieser Bedingung genügt, denn es ergiebt sich dann:

$$f(z) \equiv (z - \eta^{\rho_1}E_1)(z\eta^{\rho_2} - E_2)\ldots(z\eta^{\rho} - E_n) \pmod{\eta^M}.$$

In dem entwickelten Product ist nun das von z freie Glied gleich $\eta^{\rho_1}E_2\ldots E_n$ also durch η theilbar, während sich der Coefficient von z für $\eta = 0$ auf $E_2\ldots E_n$ reducirt, also η sicher nicht als Factor enthält, und hiermit ist die aufgestellte Behauptung vollständig bewiesen.[1]

[1] Die Richtigkeit der soeben bewiesenen Behauptung kann auch direct aus dem zugehörigen Diagramme erschlossen werden.

In der Gleichung

$$f(z) = A_0(\xi\eta) + A_1(\xi\eta)z + \dots + A_n(\xi\eta)z^n = 0$$

sind also die Coefficienten $A_i(\xi\eta)$ ganze Functionen von η mit algebraischen Potenzreihen von ξ als Coefficienten und es beginnt $A_0(\xi\eta)$ mindestens mit der ersten, $A_1(\xi\eta)$ aber sicher mit der nullten Potenz von η; entwickelt man also die Coefficienten nach Potenzen von η, so kann diese Gleichung folgendermassen geschrieben werde:

$$a_{10}(\xi)\eta + a_{01}(\xi)z + \sum_{i+k=2,3,\dots} a_{ik}(\xi)\eta^i z^k = 0,$$

wo die $a_{ik}(\xi)$ algebraische Potenzreihen von ξ sind, welche keine negativen Potenzen von ξ enthalten. Durch Auflösung dieser Gleichung nach z ergiebt sich endlich:

$$z = \gamma_{10}(\xi)\eta + \Sigma\gamma_{ik}(\xi)\eta^i z^k,$$

wo allgemein:

$$\gamma_{rs}(\xi) = -\frac{a_{rs}(\xi)}{a_{01}(\xi)}$$

gesetzt ist. Nur in dem Falle, dass der gemeinsame Nenner $a_{01}(\xi)$ für $\xi = 0$ verschwindet, können die Reihen γ_{rs} von negativer Ordnung werden; dieser Fall tritt also nur für eine endliche Anzahl von Stellen ξ ein. Alsdann führen wir genau wie in § 4 für η und z die neuen Variablen $\bar{\eta}$ und $\bar{z}$

$$\eta = \xi^\sigma \bar{\eta}, \qquad z = \xi^\tau \bar{z}$$

ein, und bestimmen σ und τ als die kleinsten Multipla von a^*, für welche in der so sich ergebenden Gleichung:

$$\bar{z} = \gamma_{10}\xi^{\sigma-\tau}\bar{\eta} + \Sigma\gamma_{ik}\xi^{i\sigma+k\tau-\tau}\bar{\eta}^i\bar{z}^k$$

alle Reihen auf der rechten Seite von nicht negativer Ordnung werden. Schreiben wir dann diese Gleichung kürzer

$$\bar{z} = g_{10}(x\,|\,\alpha) + \Sigma g_{ik}(x\,|\,\alpha)\bar{\eta}^i\bar{z}^k,$$

so stimmt sie vollständig mit der Gleichung (11) des § 4 überein, und es gelten somit für $\bar{z}$ bzw. für z alle Folgerungen welche wir damals

aus ihr gezogen hatten. Wir zeigten dort, dass diese Gleichung stets eine und auch nur eine Lösung:

$$\bar{z} = \bar{e}_1(x\,|\,\alpha)\bar{\eta} + \bar{e}_2(x\,|\,\alpha)\bar{\eta}^2 + \dots$$

von *positiver* Ordnung besitzt, deren Coefficienten Potenzreihen von $(x - \alpha)$ und deren Ordnungen alle nicht negativ sind. Ist R der gemeinsame Convergenzbereich der Reihen $g_{ik}(x\,|\,\alpha)$ so convergirt die Reihe $\bar{z}$ wenn man x innerhalb jenes Bereiches beliebig annimmt, und dann $\bar{\eta}$ auf einen durch jenen Werth von x bestimmten ebenfalls endlichen Bereich beschränkt. Nur dann *kann* also jener Bereich der Reihe $\bar{z}$ unter jede noch so kleine Grenze herabsinken, wenn das Gleiche für den Convergenzbereich der Coefficienten $g_{ik}(x\,|\,\alpha)$ oder was dasselbe ist für die Reihen $\gamma_{ik}(\xi)$ der Fall ist.

Nun sind aber die Reihen $\gamma_{ik}(\xi) = -\frac{a_{ik}(\xi)}{a_{01}(\xi)}$, ihr Convergenzbereich ist also entweder gleich dem gemeinsamen Convergenzbereich der Reihen $a_{10}(\xi)$, $a_{01}(\xi)$, $a_{rs}(\xi)$, oder seine Peripherie geht durch die nächste Nullstelle des gemeinsamen Nenners $a_{01}(\xi)$ hindurch.

Hieraus folgt, dass die Reibe $\bar{z}$, also auch die Reihe z_1, stets innerhalb einer endlichen Umgebung der betrachteten Stelle gleichmässig convergirt, und dass sie auch die eine der n Wurzeln darstellt, und das Gleiche gilt also auch für die $n - 1$ anderen Wurzeln der vorgelegten Gleichung.

§ 12. *Der Convergenzbereich der Reihen* $z_1, z_2, \dots, z_n$.

Die im vorigen Abschnitte durchgeführten Untersuchungen haben zu dem Ergebniss geführt, dass die n Reihen $z_1, z_2, \dots, z_n$ stets innerhalb einer endlichen Umgebung der Stelle $\mathfrak{P}$ ($\xi = 0$, $\eta = 0$) oder, was dasselbe ist, der Stelle

$$x = \alpha, \qquad y = (y_0)_0$$

gleichmässig convergiren, und hier die n Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ darstellen; hier bedeutet $(y_0)_0$ den Werth der Potenzreihe y_0 für $x = \alpha$.

Falls eine von diesen Reihen mit negativen Potenzen von $y - y_0$ beginnt, oder falls ihre Coefficienten negative Potenzen von $x - \alpha$ ent-

halten, so muss von jenem Bereiche eine *beliebig kleine* Umgebung des Curvenzweiges $y = y_0$ oder der Geraden $x = \alpha$ abgenommen werden, innerhalb deren jene Entwickelung nicht gültig ist, analog, wie beim Laurent'schen Satze die Entwickelung innerhalb eines den betrachteten Punkt umgebenden Kreisringes gilt, dessen innerer Radius aber beliebig klein angenommen werden kann.

Es sei

$$z_1 = e_h(x\,|\,\alpha)(y - y_0)^{\frac{h}{\delta}} + \dots$$

irgend eine jener n Wurzeln; die Coefficienten $e_k(x\,|\,\alpha)$ sind algebraische Functionen von x, welche sich durch das im § 7 auseinandergesetzte Verfahren direct bestimmen lassen; sie sind alle auf einer ganz bestimmten Riemann'schen Fläche eindeutig ausgebreitet, auf welcher auch die den Curvenzweig darstellende Reihe y_0 eindeutig ist. Aus der Natur der die Coefficienten darstellenden Gleichungen ergiebt sich ferner, dass die Reihen $e_h(x\,|\,\alpha)$, $e_{h+1}(x\,|\,\alpha), \dots$, wieviele man auch betrachten mag, auf jener Riemann'schen Fläche nur eine endliche Anzahl von Polen besitzen, denn man überzeigt sich leicht, dass in den linearen Gleichungen welche die regulären Coefficienten definiren, der Coefficient des höchsten Gliedes, dessen Nullstellen ja die Pole jener Glieder bestimmen, immer derselbe ist (vgl. § 10 Ende).

Alle jene Coefficienten $e_k(x\,|\,\alpha)$ convergiren also gemeinsam in dem Kreise, dessen Peripherie durch den nächsten critischen Punkt hindurchgeht, d. h. entweder durch den nächsten Verzweigungspunkt der Riemann'schen Fläche, oder durch den nächsten der in endlicher Anzahl vorhandenen Pole der Reihen $e_k(x\,|\,\alpha)$.

Obwohl nun jene Reihen auch als Functionen von x und y betrachtet stets innerhalb einer endlichen Umgebung des betrachteten Punktes $\mathfrak{P} = (x = \alpha\,, y = (y_0)_0)$ convergiren, so kann doch der Fall eintreten, dass dieser Bereich in allen seinen Dimensionen kleiner und kleiner wird, falls jener Punkt $\mathfrak{P}$ sich einer gewissen Grenzlage nähert; tritt dieser Fall doch schon bei einer algebraischen Function einer Variablen x ein, wenn sich der Punkt einer Verzweigungsstelle der zugehörigen Riemann'schen Fläche annähert.

Bei der Untersuchung dieser Frage wollen und können wir uns auf

den Fall beschränken, dass z eine *ganze* algebraische Function ist, dass also die Gleichung für z die Form hat:

$$f(z) = z^n + A_{n-1}(xy)z^{n-1} + \dots + A_0(xy) = 0$$

und alle $A_i(xy)$ ganze Functionen von x und y sind. Ist das nicht der Fall, so kann ja

$$z = \frac{\zeta}{A_n(xy)}$$

gesetzt werden, wo ζ eine ganze algebraische Function ist, und es kann dieser Quotient nun in eine Reihe entwickelt werden.

Zweitens nehmen wir an, dass der betrachtete Punkt

$$\mathfrak{P} = (x = \alpha\,, y = (y_0)_0)$$

sich im Endlichen befindet, dass also die Potenzreihe:

$$y_0 = \beta_0 + \beta_1(x - \alpha) + \dots$$

keine negativen Glieder enthält; auch hierin liegt keine Beschränkung der Allgemeinheit; wäre nämlich etwa

$$y_0 = \frac{\beta_{-h}}{(x-\alpha)^h} + \dots + \frac{\beta_{-1}}{x-\alpha} + \dots = \frac{1}{(x-\alpha)^h} E(x\,|\,\alpha),$$

so braucht man nur die Variable y durch $y' = \frac{1}{y}$ zu ersetzen, denn dann wird:

$$y' = \frac{1}{y_0} = (x-\alpha)^h \frac{1}{E(x\,|\,\alpha)} = (x-\alpha)^h\left(\frac{1}{\beta_{-h}} + \dots\right),$$

und in der transformirten Gleichung liegt der entsprechende Punkt im Endlichen.

Wir gelangten nun im vorigen Abschnitte dadurch zu der Gleichung:

$$(1) \qquad a_{10}\eta + a_{01}z + \Sigma a_{ik}\eta^i z^k = 0$$

dass wir in der ursprünglichen Gleichung:

$$z = z_1^{(0)} + \bar{z}$$

setzten, wo

$$z_1^{(0)} = e_h(\xi)\eta^h + e_{h+1}(\xi)\eta^{h+1} + \dots + e_r(\xi)\eta^r$$

das Aggregat der $(r-h+1)$ Anfangsglieder der Reihe z_1 bedeutet, und r beliebig gross gewählt werden kann; dann genügt $\bar{z}=e_{r+1}(\xi)\eta^{r+1}+\dots$ der Gleichung:

$$(2) \qquad f(z_1^{(0)}+\bar{z})=f(z_1^{(0)})+f'(z_1^{(0)})\bar{z}+\dots+\frac{f^{(n)}(z_1^{(0)})}{|\underline{n}}\bar{z}^n=0$$

und diese Gleichung erhält, wenn r genügend gross gewählt wird, die Form (1). Die Coefficienten dieser Gleichung (2) werden ganze rationale Functionen der Reihencoefficienten von $z_1^{(0)}$ oder von z_1, convergiren also ebenfalls innerhalb des Convergenzbereiches desselben. Denkt man sich also jene Coefficienten $\dfrac{f^{(i)}(z_1^{(0)})}{|\underline{i}}$ nach Potenzen von η entwickelt, so convergiren die Coefficienten der Potenzen von η also die Reihen a_{10}, a_{hi}, innerhalb des Bereiches der Reihencoefficienten von z_1. Nach den am Ende des vorigen Abschnittes ausgesprochenen Sätzen wird also der Convergenzbereich der Reihe $\bar{z}$ oder was dasselbe ist, der Bereich der Reihe z_1 als Function von ξ *und* η betrachtet entweder durch den Convergenzbereich ihrer Coefficienten $e_k(x\,|\,\alpha)$ begrenzt, oder durch die nächste Nullstelle der Reihe $a_{10}(\xi)$, in der Weise, dass für einen beliebigen Werth von (ξ) innerhalb dieses Convergenzbereiches immer für η eine *endliche* Umgebung von $\eta=0$ so abgegrenzt werden kann, dass jene Reihe z_1 convergirt.

Die Bedeutung jener nächsten Nullstelle von $a_{10}(\xi)$ kann aber leicht anders characterisirt werden. Entwickelt man den ersten Coefficienten $f'(z_1^{(0)})$ so ergiebt sich:

$$f'(z_1^{(0)})=a_{01}(\xi)\eta^{\nu_1}+a_{11}(\xi)\eta^{\nu_1+1}+\dots$$

und diese ersten Glieder bleiben, wenn r genügend gross gewählt ist, ungeändert, wie gross auch r angenommen werde. Ersetzt man also $z_1^{(0)}$ durch die ganze Reihe z_1 selbst, so wird:

$$f'(z_1)=a_{01}(\xi)\eta^{\nu_1}+a_{11}(\xi)\eta^{\nu_1+1}+\dots,$$

also ist $a_{01}(\xi)$ das Anfangsglied der Entwickelung von $f'(z_1)$ nach Potenzen von η. Entwickelt man in gleicher Weise allgemein alle n conjugirten Werthe $f'(z_i)$ so sei:

$$f'(z_i)=a_{01}^{(i)}\eta^{\nu_i}+a_{11}^{(i)}\eta^{\nu_i+1}+\dots; \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

beachtet man dann, dass $D(x, y) = f'(z_1) \ldots f'(z_n)$ ist, so folgt, wenn man jene n Gleichungen multiplicirt:

$$D(xy) = A(\xi)\eta^N + \ldots,$$

wo der Coefficient $A(\xi)$ und der zugehörige Exponent N durch die Gleichungen bestimmt sind:

$$A(\xi) = a_{01}^{(1)} \ldots a_{01}^{(n)}, \qquad N = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n.$$

Ist nun ξ_0 ein Werth von ξ, wofür $a_{01}^{(1)}(\xi_0) = 0$ ist, so ist auch $A(\xi_0) = 0$ und umgekehrt, wenn für $\xi = \xi_0$ $A(\xi_0)$ verschwindet, so verschwindet mindestens einer der n Anfangsglieder $a_{01}^{(i)}(\xi_0)$ ebenfalls. Es ergiebt sich also das Resultat: Die Nullstellen der n conjugirten Anfangsglieder $a_{01}^{(i)}(\xi)$ sind identisch mit den Nullstellen des Anfangsgliedes in der Entwickelung der Discriminante $D(x, y)$ nach Potenzen von η oder $y - y_0$.

Es sei nun $\eta = y - y_0$ und

$$P(y, x) = (y - y_0)(y - y_0') \ldots (y - y_0^{(\mu-1)})$$

diejenige irreductible Curve von der der Linearfactor $y - y_0$ einen Zweig darstellt. Wir betrachten dann den allgemeinsten Fall, dass die zu Grunde gelegte Curve ein ν-facher Factor der Discriminantencurve $D(xy) = 0$ ist. Es sei also:

$$D(xy) = P(y, x)^\nu D_1(xy).$$

Dann enthält die Gleichung $D_1(xy) = 0$ alle Curven der Discriminante ausser P. Es werde $D_1(xy)$ *die reducirte Discriminante* genannt. Entwickelt man nun jenes Product nach Potenzen von $y - y_0$ so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} D(x, y) &= (P'(y_0)(y - y_0) + \ldots)^\nu (D_1(y_0, x) + \ldots) \\ &= (P'(y_0)^\nu \cdot D_1(y_0, x))(y - y_0)^\nu + \ldots \end{aligned}$$

und es ergiebt sich so für das Product der n conjugirten Anfangsglieder die Gleichung:

$$a_{10}^{(1)} a_{10}^{(2)} \ldots a_{10}^{(n)} = P'(y_0)^\nu D_1(y_0, x).$$

Dieses Product verschwindet demnach dann und nur dann, wenn $x = x_0$ so gewählt wird, dass entweder $P'(y_0, x_0) = 0$ wird, oder dass $D_1(y_0, x_0)$ verschwindet. Im ersteren Falle ist x_0 ein critischer Punkt (Pol oder

Verzweigungspunkt) der Curve $P = 0$, also bereits unter den critischen Punkten der Coefficienten enthalten, im zweiten Falle liegt jener Punkt erstens auf $P = 0$ und zweitens auf $D_1(y, x) = 0$, er ist also ein Schnittpunkt mit der reducirten Discriminantencurve. Also ergiebt sich das Resultat:

Die n Reihen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ können nur dann einen unendlich kleinen Convergenzbereich erhalten, wenn der Punkt $\mathfrak{P}$ sich unbegrenzt einem critischen Punkte der Reihencoefficienten oder einem Schnittpunkte der Curve $P = 0$ mit der reducirten Discriminantencurve nähert.

§ 13. *Der analytische Character der n Gleichungswurzeln und die ihnen zugehörigen Riemann'schen Kugelflächen.*

Ich betrachte jetzt irgend eine der n Gleichungswurzeln

$$(1) \qquad z_0 = e_h(x \mid \alpha)(y - y_0)^{\frac{h}{\delta}} + e_{h+1}(x \mid \alpha)(y - y_0)^{\frac{h+1}{\delta}} + \ldots$$

und untersuche den analytischen Character ihrer Coefficienten $e_h, e_{h+1}, \ldots$. Wie soeben bewiesen wurde, sind sie alle *algebraische* Functionen von x, und zwar sind alle regulären Coefficienten $e_\tau, e_{\tau+1}, \ldots$ rationale Functionen von y_0 und den irregulären Anfangscoefficienten $e_h \ldots e_{\tau-1}$. Es existirt demnach eine Riemann'sche Kugelfläche niedrigster Ordnung, auf welcher alle jene Coefficienten und y_0 eindeutig ausgebreitet sind. Es sei $\mathfrak{R}_\nu$ jene Fläche und ν ihre Blätterzahl; dann soll $\mathfrak{R}_\nu$ die zu der Reihe z_0 zugehörige Kugelfläche genannt werden. Jene Reihen $y_0, e_h(x \mid \alpha)$, $e_{h+1}(x \mid \alpha), \ldots$ sind dann die Entwickelungen der entsprechenden algebraischen Functionen in der Umgebung eines von denjenigen ν Punkten der Kugelfläche, welche der Stelle $x = \alpha$ zugeordnet sind; ist $\mathfrak{P}$ jener Punkt, so soll $\mathfrak{P}$ der zu z_0 zugehörige Punkt genannt werden.

Da auch die algebraische Function y_0 auf $\mathfrak{R}_\nu$ eindeutig ist so muss ihre Ordnungszahl μ oder der Grad von $P(y, x)$ in y ein Theiler von ν sein; es sei also:

$$\nu = \lambda\mu.$$

Die Coefficienten $e_k(x\,|\,\alpha)$ besitzen nun, wie weit man auch gehen mag, zusammen stets nur eine endliche Anzahl von Polen auf der Kugelfläche $\mathfrak{R}_\nu$, und ebenso besitzt jene Fläche $\mathfrak{R}_\nu$ nur eine endliche Anzahl von Verzweigungspunkten, in denen mindestens eine von jenen Reihen nach gebrochenen Potenzen des Linearfactors $x-\alpha$ fortschreitet. Man kann nun y_0 und alle Coefficienten simultan von dem zuerst betrachteten Punkte $\mathfrak{P}$ nach einem beliebigen anderen Punkte $\mathfrak{P}'$ der Kugelfläche fortsetzen; dadurch geht die ganze Reihe z_0 in (1) in eine andere:

$$(1') \qquad z_0' = e_h'(x\,|\,\alpha')(y-y_0')^{\frac{h}{b}} + e_{h+1}'(x\,|\,\alpha')(y-y_0')^{\frac{h+1}{b}} + \dots$$

über, in welcher jetzt y_0', e_h', e_{h+1}', ... die jenem Endpunkte entsprechenden eindeutig bestimmten Potenzreihen sind, welche nach ganzen oder gebrochenen Potenzen des zugehörigen Linearfactors $(x-\alpha')$ fortschreiten; und jede so sich ergebende Reihe z_0' beginnt natürlich mit derselben Potenz des Linearfactors $y-y_0'$, wie die ursprüngliche z_0. Da jede der zur Fortsetzung benutzten Reihen als Function von x und y betrachtet, in einem endlichen Bereiche convergirt, abgesehen von dem beliebig kleinen Bereiche einer endlichen Anzahl von *Punkten* auf $\mathfrak{R}_\nu$, so kann jene Potenzreihe auch wirklich in der hier geschilderten Weise längs $\mathfrak{R}_\nu$ mit Vermeidung jener critischen Punkte fortgesetzt werden, und aus den bekannten Sätzen der Functionentheorie folgt, dass die so sich ergebende Endreihe z_0' eine eindeutig bestimmte unter den n Wurzeln ist, welche die Gleichung $f(z)=0$ in der Umgebung des dort vorhandenen Zweiges $(x=\alpha', y=y_0')$ derselben Curve $P(y,x)=0$ besitzt. Aber auch für jeden der soeben noch ausgeschlossenen critischen Punkte $\overline{\mathfrak{P}}_0$ $(x=\bar\alpha, y=y_0)$ der Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}_\nu$ existirt eine eindeutig bestimmte Reihe

$$z_0 = e_h(x\,|\,\alpha)(y-y_0)^{\frac{h}{b}} + e_{h+1}(x\,|\,\alpha)(y-y)^{\frac{h+1}{b}} + \dots,$$

welche als die Fortsetzung von z_0 in jenem Punkt anzusehen ist. In der That besitzt ja die Gleichung $f(z)=0$ in $\overline{\mathfrak{P}}$ ebenfalls genau n Wurzeln, welche ihrerseits innerhalb einer *endlichen* Umgebung von $\overline{\mathfrak{P}}$ gleichmässig convergiren, weil jener Convergenzbereich nur *beim Heranrücken* an $\overline{\mathfrak{P}}$ nicht aber *in* $\overline{\mathfrak{P}}$ selbst unendlich klein werden kann. Von diesen n so gefundenen Reihen coincidirt nun eine und nur eine in unendlich vielen Punkten der Umgebung von $\overline{\mathfrak{P}}$ mit den Fortsetzungen von z_0 und diese

ist es, welche als die Fortsetzung von z_0 für $\mathfrak{P}$ anzusehen ist. Es ergiebt sich also der Satz:

> Jedem Punkte $\mathfrak{P}$ der Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}_\nu$ entspricht eine eindeutig bestimmte Wurzel $z_0 = \Sigma e_k(x\,|\,\alpha)(y - y_0)^{\frac{k}{\delta}}$, der Gleichung $f(z) = 0$, und alle diese können als die analytischen Fortsetzungen aus einer von ihnen auf der Fläche $\mathfrak{R}_\nu$ angesehen werden.

Zu jedem Punkte $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{R}_\nu$ gehört ein eindeutig bestimmtes Werthsystem $x = \alpha$, $y = y_0$ also auch eine und nur eine Wurzel z_0 der gegebenen Gleichung. Sei nun umgekehrt der Zweig l_0 also $(x = \alpha, y = y_0)$ gegeben, so entsprechen demselben auf $\mathfrak{R}_\nu$ im Allgemeinen mehrere Punkte, also auch mehrere zugehörige Reihen z_0; von den n Wurzeln $z_1 \dots z_n$ die zu l_0 gehören sind also mehrere einfache analytische Fortsetzungen aus einander längs $\mathfrak{R}_\nu$. In der That seien $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_\nu$ die ν der Stelle $x = \alpha$ entsprechenden Punkte der Riemann'schen Fläche $\mathfrak{R}_\nu$ und zwar mögen diese der Einfachheit wegen als regulär angenommen werden; für Verzweigungsstellen ergeben sich durch analoge Betrachtungen die gleichen Resultate. Ist dann, wie oben angenommen, $\nu = \lambda\mu$ so nimmt die algebraische Function μ^{ter} Ordnung y_0 in genau λ von diesen Punkten denselben Werth an; es sei die Bezeichnung so gewählt, dass y_0 in $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_\lambda$ seinen Werth nicht ändert; in jedem folgenden Punkte aber einen anderen Werth erhält. Sind dann $z_1, z_2, \dots, z_\lambda$ die λ zugehörigen Wurzeln, und ist allgemein:

$$z_i = e_h^{(i)}(x\,|\,\alpha)(y - y_0)^{\frac{h}{\delta}} + e_{h+1}^{(i)}(x\,|\,\alpha)(y - y_0)^{\frac{h+1}{\delta}} + \cdots, \qquad (i = 1, 2, \dots, \lambda)$$

so sind diese sämmtlich von einander verschieden, da anderenfalls die Coefficienten schon auf einer Kugelfläche niedrigerer Ordnung eindeutig ausgebreitet wären, und sie befriedigen alle die vorgelegte Gleichung in der Umgebung des Zweiges l_0, gehören also zu den n Wurzeln derselben. Alle übrigen jener Kugelfläche $\mathfrak{R}_\nu$ zugehörigen Entwickelungen entsprechen aber nicht *diesem* Zweige l_0, denn damit das für einen Punkt $\mathfrak{P}$ der Fall sei, muss einmal $x = \alpha$ sein, d. h. $\mathfrak{P}$ muss mit einem der Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_\nu$ zusammenfallen, dann aber muss $y = y_0$ sein, und dies ist nur für $\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_\lambda$ der Fall. Es ergiebt sich also der Satz:

Ist l_0 der Zweig einer Curve μ^{ter} Ordnung, und ist $\nu = \lambda\mu$ die Ordnung der zu *einer* der zugehörigen Gleichungswurzeln z_1 zugeordneten Riemann'schen Kugelflächen, so sind λ von ihnen z_1, $z_2, \ldots, z_\lambda$ analytische Fortsetzungen aus dieser einen, sind also mit dieser zugleich bestimmt.

Ausser diesem Cyclus können aber noch andere von den n Reihen mit z_1 zusammenhängen: Es sei wie vorher z_1 eine Wurzel unserer Gleichung, welche nach ganzen Potenzen von $(y - y_0)^{\frac{1}{b}}$ fortschreitet; dann convergirt die Entwickelung:

$$z_1 = e_h(y - y_0)^{\frac{h}{b}} + e_{h+1}(y - y_0)^{\frac{h+1}{b}} + \ldots$$

innerhalb einer endlichen Umgebung der Stelle $y = y_0$, wenn für x ein beliebiger Werth in einer endlichen Umgebung von $x = a$ gewählt wird. Hält man nun x, also auch $y_0, e_h, e_{h+1}, \ldots$ fest, und lässt man y in einer genügend kleinen geschlossenen Curve den Punkt $y = y_0$ umlaufen, so erhält man eine zweite Entwickelung:

$$z_1' = \omega^h e_h(y - y_0)^{\frac{h}{b}} + \omega^{h+1} e_{h+1}(y - y_0)^{\frac{h+1}{b}} + \ldots,$$

in welcher $\omega = e^{\frac{2\pi i}{b}}$ eine b^{te} Wurzel der Einheit bedeutet, und welche ebenfalls eine, und zwar von z_1 verschiedene Wurzel unserer Gleichung darstellt. Lässt man den Punkt genau in derselben Weise b Male den Zweig $y = y_0$ umkreisen, so erhält man zu z_1 einen Cyclus vom b Wurzeln $z_1, z_1', \ldots, z_1^{(b-1)}$, welche durch die b folgenden Reihen dargestellt sind

$$z_1^{(r)} = \omega^{hr} e_h(y - y_0)^{\frac{h}{b}} + \omega^{(h+1)r} e_{h+1}(y - y_0)^{\frac{h+1}{b}} + \ldots \qquad (r = 0, 1, \ldots, b-1)$$

und erst nach dem b^{ten} Umlaufe kehrt man zu der ersten Wurzel zurück.

Alle diese Wurzeln sind von einander verschieden, und man zeigt leicht, dass zu jeder von den $(\lambda - 1)$ anderen Wurzeln $z_2, z_3, \ldots, z_\lambda$ ein gleicher Cyclus von b conjugirten Reihen gehört.

Indessen brauchen die so gefundenen λb Wurzeln:

$$\begin{array}{l} z_1, z_1', \ldots, z_1^{(b-1)}, \\ z_2, z_2', \ldots, z_2^{(b-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_\lambda, z_\lambda', \ldots, z_\lambda^{(b-1)}, \end{array}$$

welche sich aus einer unter ihnen durch analytische Fortsetzung ergeben, nicht nothwendig von einander verschieden zu sein. Sollen z. B. die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$f(z) = z^2 - xy + xy^2 = 0$$

in der Umgebung der Stelle $x = 0$ auf der Geraden $y = 0$, also nach Potenzen von y entwickelt werden, so erhält man:

$$z_1 = (xy)^{\frac{1}{2}}(1 - y)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{7}{2}} - \dots;$$

hier ist also $\lambda = 2$, $b = 2$ und hier geht z_2 aus z_1 dadurch hervor, dass man $x^{\frac{1}{2}}$ durch $-x^{\frac{1}{2}}$ ersetzt, während z_1' bzw. z_2' aus z_1 und z_2 durch Verwandlung von $y^{\frac{1}{2}}$ in $-y^{\frac{1}{2}}$ erhalten wird; von diesen vier Reihen sind aber offenbar nur zwei von einander verschieden.

Ersetzt man aber hier den Linearfactor y durch

$$\bar{y} = xy$$

welcher, als Function von y betrachtet, für dieselben Werthe von y verschwindet, so geht die Grundgleichung für z über in:

$$z^2 - \bar{y} + \frac{\bar{y}^2}{x} = 0$$

und die Entwickelung nach Potenzen von $\bar{y}$ liefert jetzt:

$$z_1 = \bar{y}^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\frac{1}{x}\bar{y}^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}\frac{1}{x^2}\bar{y}^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}\frac{1}{x^3}\bar{y}^{\frac{7}{2}} - \dots;$$

hier ist also $\lambda = 1$, $b = 2$ und die beiden conjugirten Entwickelungen z_1 und z_1' sind in der That verschieden. Dasselbe kann nun in ganz singulären Fällen auch für Gleichungen von höherem Grade vorkommen. Es sei also

$$z_1 = e_h(y - y_0)^{\frac{h}{b}} + e_{h+1}(y - y_0)^{\frac{h+1}{b}} + \dots$$

diejenige Wurzel, welche zu dem Punkte $\mathfrak{P}_1$ von $\mathfrak{R}_\nu$ gehört und

$$z_1, z_1', \dots, z_1^{(b-1)}$$

der durch Umkreisung von l_0 aus z_1 sich ergebende Cyclus; es sei jetzt

$$z_2 = e'_h(y-y_0)^{\frac{h}{b}} + e'_{h+1}(y-y_0)^{\frac{h+1}{b}} + \cdots$$

eine zu z_1 conjugirte Reihe, welche zum Punkte $\mathfrak{P}_2$ von $\mathfrak{R}$, gehört und welche bereits in dem zu z_1 gehörigen Cyclus vorkommen möge; so dass etwa

(2) $$z_2 = z_1^{(\beta)}$$

ist. Umläuft der Punkt jetzt den Zweig l_0 ein Mal, so ergiebt sich aus dieser Gleichung die weitere

$$z'_2 = z_1^{(\beta+1)},$$

und durch Fortsetzung dieses Verfahrens folgt, dass der zu z_2 gehörige Cyclus mit dem zu z_1 gehörigen identisch ist, dass nämlich allgemein

$$z_2^{(i)} = z_1^{(\beta+i)}$$

ist.

Ich untersuche jetzt, welcher Bedingung die Coefficienten e_k genügen müssen, damit zwei Cyclen übereinstimmen; vergleicht man in der Gleichung (2) oder also in:

$$e'_h(y-x_0)^{\frac{h}{b}} + e'_{h+1}(y-y_0)^{\frac{h+1}{b}} + \cdots$$
$$= \omega^{\beta h} e_h(y-y_0)^{\frac{h}{b}} + \omega^{(\beta+1)h} e_{h+1}(y-y_0)^{\frac{h+1}{b}} + \cdots$$

die Coefficienten gleich hoher Potenzen von $y - y_0$, so folgt, dass jene Gleichung dann und nur dann bestehen kann, wenn für alle Coefficienten der Reihe, wie weit man auch gehen mag, die Gleichungen bestehen:

(3) $$e'_k = \varpi^k e_k \qquad (k=h,\,h+1,\ldots)$$

wenn $\varpi = \omega^\beta$ ebenfalls eine Einheitswurzel ist, deren Ordnungszahl $\bar{b}$ gleich b oder gleich einem Theiler von b ist. Hieraus folgt also zunächst:

$$(e'_k)^{\bar{b}} = e_k^{\bar{b}}.$$

Dieser Ausnahmefall kann also nur dann eintreten, wenn die $\bar{b}^{\text{ten}}$ Potenzen *aller* Coefficienten beim Übergange von $\mathfrak{P}_1$ zu $\mathfrak{P}_2$ ungeändert bleiben, also sämmtlich algebraische Functionen von niedrigerer Ordnung sind.

Man kann nun auch in diesem allgemeinsten Falle den Linearfactor $y - y_0$ so durch ein Vielfaches $e(x)(y - y_0)$ desselben ersetzen, dass nunmehr z_1 und der zugehörige Cyclus nicht mehr auftritt. Zu der Bestimmung dieses Multiplicators e in diesem Falle führt die folgende Überlegung. Es sei:

$$z_1 = e_h (y - y_0)^{\frac{h}{b}} + e_k (y - y_0)^{\frac{k}{b}} + e_l (y - y_0)^{\frac{l}{b}} + \dots$$

die Entwickelung von z_1 nach Weglassung aller etwa identisch verschwindenden Coefficienten e; dann können die Exponentenzähler $h, k, l, \dots$ nicht alle einen und denselben Theiler mit dem Nenner b hahen, da jene Entwickelung sonst nicht nach Potenzen von $(y - y_0)^{\frac{1}{b}}$ fortschreiten würde. Sind also $(k, l, \dots, r, b)$ ein System von Exponenten, welche mit b zusammen relativ prim zu einander sind, so kann man andere ganze Zahlen $\varkappa, \lambda, \dots, \rho, \beta$ so bestimmen, dass:

$$\varkappa k + \lambda l + \dots + \rho r + \beta b = 1$$

oder, da $\bar{b}$ ein Theiler von b ist, dass:

$$\varkappa k + \lambda l + \dots + \rho r \equiv 1 \pmod{\bar{b}}$$

ist. Setzt man nun:

$$e = e_k^{\varkappa} e_l^{\lambda} \dots e_r^{\rho}$$

und bildet den conjugirten Werth e' von e, so erhält dieser nach (3) die Form:

$$e' = \bar{\omega}^{\varkappa k + \lambda l + \dots + \rho r} e = \bar{\omega} e.$$

Führt man nun statt $(y - y_0)$ den neuen Linearfactor η durch die Gleichung:

$$\eta = e^b (y - y_0)$$

ein, welcher sich von ihm nur durch einen multiplicativen von x allein abhängigen Factor unterscheidet, so geht die Entwickelung von z_1 über in:

$$z_1 = \frac{e_h}{e^h} \eta^{\frac{h}{b}} + \frac{e_{h+1}}{e^{h+1}} \eta^{\frac{h+1}{b}} + \dots = E_h \eta^{\frac{h}{b}} + E_{h+1} \eta^{\frac{h+1}{b}} + \dots .$$

Auch hier bleiben alle Coefficienten $E_h, E_{h+1}, \dots$ auf der Kugelfläche

$\mathfrak{R}_\nu$ eindeutig ausgebreitet, jedoch ist dieser jetzt nicht mehr die Fläche niedrigster Ordnung, welche diese Eigenschaft hat; bei dem Übergange von $\mathfrak{P}_1$ nach $\mathfrak{P}_2$ bleibt nämlich jeder Coefficient $E_k = \frac{e_k}{e^k}$ ungeändert, da sich sowohl sein Zähler als sein Nenner mit ϖ^k multiplicirt. In diesem Falle sind also bereits alle Coefficienten auf einer Kugelfläche $\mathfrak{R}_{\nu_1}$ niedrigerer Ordnung eindeutig ausgebreitet, und zu einer Reihe z, gehören weniger als λ conjugirte Reihen $z_1, z_2, \ldots, z_{\lambda_1}$. Falls auch hier noch gewisse unter den $b\lambda_1$ Reihen

$$\begin{array}{l} z_1\,,\; z_1'\,,\; \ldots,\; z_1^{(b-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{\lambda_1},\; z_{\lambda_1}',\; \ldots,\; z_{\lambda_1}^{(b-1)}, \end{array}$$

identisch ausfallen sollten, kann man die gleiche Reduction anwenden und solange fortfahren, bis alle diese zu z_1 gehörigen Reihen lauter verschiedene Wurzeln darstellen.

Der einzige ganz unwesentliche Unterschied ist also der, dass in diesem singulären Falle die n Wurzeln nicht nach Potenzen von $y - y_0$ sondern von $e^b(y - y_0)$ entwickelt werden, wo e^b eine algebraische Function von x allein bedeutet, welche auf der zugehörigen (neuen) Riemann'schen Fläche $\mathfrak{R}_{\nu_1}$ eindeutig ist. Im Folgenden brauchen wir also diesen Fall nicht weiter zu berücksichtigen, da er von dem regulären nicht wesentlich verschieden ist. Es möge eben in der Folge von vorn herein vorausgesetzt worden, dass in diesem Falle die Entwickelung nach Potenzen von $e^b(y - y_0)$ fortschreitet; dann sind immer die λb Reihen $z_i^{(k)}$ alle von einander verschieden.

§ 14. *Die Cyclen analytisch zusammenhängender Wurzeln und ihre Ordnungszahlen.*

Die im vorigen Abschnitte durchgeführten Untersuchungen haben ergeben, dass sich die n Wurzeln $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ähnlich wie bei den Functionen einer Variablen in Cyclen so anordnen lassen, dass alle Reihen eines Cyclus aus einer unter ihnen durch analytische Fortsetzung längs $\mathfrak{R}_\nu$ oder längs der Curve $P(y, x) = 0$ erhalten werden. Ist nämlich:

$$z_1 = e_h(x)(y - y_0)^{\frac{h}{b}} + e_{h+1}(x)(y - y_0)^{\frac{h+1}{b}} + \ldots$$

so erhält man alle λb conjugirten Reihen dadurch, dass man einmal die Coefficienten $e_k(x)$, das andere Mal das Entwickelungselement $(y-y_0)^{\frac{1}{b}}$ unabhängig von einander durch ihre conjugirten Werthe ersetzt; geometrisch entsprechen den hier betrachteten Fortsetzungswegen alle Wege und Umläufe längs der Schnittcurve P.

Es sei nun $\bar{z}_1$ irgend eine der n Wurzeln welche noch nicht in dem zu z_1 gehörigen Cyclus enthalten ist; dann gehört zu ihr ein zweiter Cyclus etwa von $\lambda' b'$ Reihen, welche alle durch Fortsetzung längs P aus $\bar{z}_1$ hervorgehen, und in gleicher Weise können alle n Wurzeln in Cyclen analytisch zusammenhängender Reihen zusammengefasst werden.

Es möge für die Folge angenommen werden, dass die n zum Zweige l_0 von P gehörigen in drei solche Cyclen von λb, $\lambda' b'$, $\lambda'' b''$ zusammenhängenden Reihen zerfallen und es seien z_1, z_1', z_1'' je eine derselben, so dass alle anderen aus einer von ihnen durch Fortsetznng längs P hin hervorgehen. Dann ist zunächst

$$n = \lambda b + \lambda' b' + \lambda'' b'';$$

ferner gehört zu jedem dieser drei Cyclen eine Kugelfläche auf denen die Coefficienten e von den Reihen des betreffenden Cyclus eindeutig ausgebreitet sind; diese Flächen seien durch $\mathfrak{R}_\nu$, $\mathfrak{R}_{\nu'}$, $\mathfrak{R}_{\nu''}$ bezeichnet; ist wieder μ der Grad von P so ist endlich:

$$\nu = \lambda\mu, \qquad \nu' = \lambda'\mu, \qquad \nu'' = \lambda''\mu.$$

Die geometrische Bedeutung dieses Resultats ist die folgende: Es sei L die Schnittcurve der Oberfläche $f(z, xy) = 0$ und des geraden Cylinders $P(y, x) = 0$ welcher über der ebenen Curve $P(y, x) = 0$ senkrecht errichtet ist. Die n zu dem Zweige l_0 $(x = \alpha,\ y = y_0)$ gehörigen Wurzeln $z_1, z_2, \ldots, z_n$ stellen dann die z-Ordinaten der Oberfläche f in einer endlichen Umgebung jener Schnittcurve L dar, also gewissermassen innerhalb eines auf der Oberfläche sich hinziehenden Bandes von veränderlicher, aber überall bestimmter endlicher Breite, welches L umgiebt. Hängen nun von jenen n Wurzeln z_i bzw. λb, $\lambda' b'$, $\lambda'' b''$ längs P analytisch zusammen, so heisst das geometrisch, dass jenes Band, die Umgebung von L, in drei getrennte Theile zerfällt, von denen jedes seinerseits in sich zusammenhängt.

Die Schnittcurve L selbst kann hierbei sehr wohl in mehr als drei getrennte Theile zerfallen; denn ist etwa:

$$z_1 = e_0(x) + e_1(x)(y - y_0)^{\frac{1}{b}} + \ldots,$$

so stellt für $y = y_0$ die Reihe

$$z_1^{(0)} = e_0(x)$$

nebst ihren Fortsetzungen geometrisch den ersten Theil der Schnittcurve L dar. Ist nun $e_0(x)$ auf $\mathfrak{R}_\nu$ von niedrigerer als der ν^{ten} Ordnung, ist also $e_0(x)$ noch auf einer Riemann'schen Fläche von niedrigerer Ordnung eindeutig, was für critische Curven $P = 0$ im Allgemeinen der Fall sein wird, so zerfällt die Curve L auf jenem ersten Bande noch weiter in getrennte Theile, welche dann erst zusammenhängen, wenn man die Schnittcurve verlässt, und ausserhalb derselben in der Umgebung fortgeht.

Es sei jetzt:

$$z_1 = e_h(x)(y - y_0)^{\frac{h}{b}} + e_{h+1}(x)(y - y_0)^{\frac{h+1}{b}} + \ldots$$

eine der λb Wurzeln des ersten Cyclus; entsprechend der Bezeichnung in der Theorie der Functionen einer Variablen sage ich dann, z_1 besitzt in Bezug auf den Zweig l_0 die Ordnungszahl h, wenn die Reihe mit der h^{ten} Potenz des Entwickelungselementes $(y - y_0)^{\frac{1}{b}}$ beginnt. Dieselbe Ordnungszahl besitzen dann aber nicht nur die λb Wurzeln desselben Cyclus, sondern diese Ordnungszahl kommt jeder der unendlich vielen Fortsetzungen von z_1 auf der ganzen zugehörigen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}_\nu$ zu, oder, was dasselbe ist, jede Fortsetzung von z_1 längs P oder längs des zu L gehörigen Bandes besitzt dieselbe Ordnungszahl h.

Man kann daher die allgemeinere Definition aufstellen:

> Die algebraische Function z besitzt auf der Kugelfläche $\mathfrak{R}_\nu$ die Ordnungszahl h, wenn ihre Entwickelungen auf dieser Kugelfläche mit der h^{ten} Potenz des zugehörigen Entwickelungselementes beginnen.

Zu jeder Curve $P = 0$ gehört eine Anzahl von Kugelflächen $\mathfrak{R}_\nu$, $\mathfrak{R}_{\nu'}$, $\mathfrak{R}_{\nu''}$ und auf jeder besitzt die algebraische Function z eine ganz bestimmte ganzzahlige Ordnungszahl, welche positiv, null oder negativ sein kann.

Durch unser Verfahren können die Ordnungszahlen von z für jede Curve P und jede zugehörige Fläche direct aus der Gleichung für z bestimmt werden.

§ 15. *Der durch z bestimmte algebraische Functionenkörper.*

Die wahre Bedeutung der bisher erlangten Resultate ergiebt sich erst dann, wenn wir von der bisher betrachteten algebraischen Function z absehen und die Gesammtheit aller durch x, y, z rational ausdrückbaren algebraischen Functionen, d. h. den durch diese Variablen constituirten algebraischen Functionenkörper $K(x, y, z)$ untersuchen.

Es sei also z durch die vorher betrachtete Gleichung $f(z, xy) = 0$ als algebraische Function von x und y definirt, und es sei jetzt:

$$\zeta = \varphi(x, y, z)$$

irgend eine rationale Function von x, y, z. Aus bekannten Sätzen der Theorie der symmetrischen Functionen ergiebt sich, dass auch ζ ebenso wie z einer Gleichung des n^{ten} Grades

$$F(\zeta, xy) = B_n(xy)\zeta^n + B_{n-1}(xy)\zeta^{n-1} + \dots + B_0(xy) = 0$$

mit ganzen rationalen Functionen von x und y als Coefficienten genügt, welche selbst irreductibel, oder die Potenz einer irreductiblen Function ist. Geometrisch stellt jene Gleichung eine neue Oberfläche dar, deren Coordinaten rational durch die entsprechenden Coordinaten der ursprünglichen ausdrückbar sind, welche also zu der durch $f = 0$ constituirten Oberflächenklasse gehört. Man kann unser im § 4 auseinandergesetztes Verfahren nun direct zur Bestimmung der n Zweige $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ benutzen, welche ζ in der Umgebung eines Zweiges l_0 $(x = \alpha, y = y_0)$ einer beliebigen Curve $P = 0$ besitzt; viel einfacher ergeben sich jene Zweige aber auf folgendem Wege: Es seien $z_1, z_2, \dots, z_n$ die n Wurzeln für z in der Umgebung des Zweiges l_0; dann erhält man ihnen entsprechend n conjugirte Reihen:

$$(1) \qquad \zeta_1 = \varphi(x, y, z_1), \qquad \zeta_2 = \varphi(x, y, z_2), \dots, \zeta_n = \varphi(x, y, z_n)$$

welche ebenfalls in endlicher Umgebung desselben Zweiges gleichmässig convergiren, und für diese die Function ζ darstellen.

Es seien nun wieder $\mathfrak{R}_\nu$, $\mathfrak{R}_{\nu'}$, $\mathfrak{R}_{\nu''}$ die zu P gehörigen Riemann'schen Kugelflächen so ergiebt sich aus den Gleichungen (1) direct, dass sich auch für eine beliebige Function ζ des Körpers $K(xyz)$ die n conjugirten Wurzeln $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ ebenfalls in Cyclen von λb, $\lambda' b'$, $\lambda'' b''$ Reihen anordnen, deren Coefficienten bzw. auf $\mathfrak{R}_\nu$, $\mathfrak{R}_{\nu'}$, $\mathfrak{R}_{\nu''}$ eindeutig ausgebreitet sind, und dass ferner z. B. die Reihen des ersten Cyclus nach ganzen Potenzen von $(y - y_0)^{\frac{1}{b}}$ fortschreiten u. s. w.; hieraus ergiebt sich das wichtige Resultat, dass die Entwickelung *jeder* algebraischen Function ζ des ganzen Körpers $K(x, y, z)$ in der Umgebung einer Curve $P = 0$ nach gebrochenen Potenzen von $y - y_0$ fortschreitet wenn dasselbe für z der Fall war, dass also jene Curve $P = 0$ für alle Oberflächen $F(\zeta, xy)$ eine Verzweigungscurve ist, wenn dasselbe für die ursprüngliche $f(z, xy) = 0$ der Fall war, und dass sie für alle eine Verzweigungscurve von derselben Ordnung $b - 1$ ist. Ist aber $P = 0$ eine Verzweigungscurve von $F(\zeta, xy) = 0$, so muss, wie oben bewiesen war, $P(x, y)$ ein Theiler der Gleichungsdiscriminante $D(\zeta)$ von F sein, und man erhält so den Satz:

Alle Verzweigungscurven sind gemeinsame Curven der Discriminantencurven aller Oberflächen des Körpers $K(x, y, z)$.

Erst später wird gezeigt werden, dass diese Discriminantencurven ausser jenen keine gemeinsame Schnittcurven besitzen. Alle bis jetzt gefundenen Resultate beziehen sich also, und hierin liegt ihr Werth, nicht bloss auf die eine algebraische Grösse z, sondern auf alle Grössen ζ des zugehörigen Körpers, oder geometrisch gesprochen auf alle Oberflächen der durch $f(z, xy) = 0$ constituirten Klasse, wie dies später noch eingehend dargelegt werden wird.

Es sei nun $P = 0$ eine beliebige Curve, $\mathfrak{R}_\nu$ eine der ihr entsprechenden Riemann'schen Flächen. Dann besitzt jede Function ζ in Bezug auf $\mathfrak{R}_\nu$ eine ganz bestimmte Ordnungszahl k; es ist nämlich k der Exponent des bezüglichen Linearfactors $(y - y_0)^{\frac{1}{b}}$ mit dem die λb zu $\mathfrak{R}_\nu$ zugehörigen Entwicklungen beginnen.

Um diese Thatsachen einfach aussprechen zu können ordne ich jeder von diesen unendlich vielen Riemann'schen Flächen $\mathfrak{R}_\nu$ einen s. g. Primtheiler $\mathfrak{p}$ zu und definire die Theilbarkeit einer algebraischen Function ζ durch einen Primtheiler $\mathfrak{p}$ folgendermassen:

Eine algebraische Function ζ ist genau durch die k^{te} Potenz eines Primtheilers p oder durch $\mathfrak{p}^k$ theilbar, wenn ihre Entwicklungen auf der zugehörigen Fläche $\mathfrak{R}_\nu$ von der k^{ten} Ordnung sind.

Die Primtheiler p oder die Kugelflächen $\mathfrak{R}_\nu$ sind die genaue Verallgemeinerung der Weierstrass'schen »Stellen» des algebraischen Gebildes, oder der Punkte der Riemann'schen Fläche in der Theorie der algebraischen Functionen einer Variablen; sie sind, wie später gezeigt werden wird, absolute Invarianten, d. h. unabhängig von jeder Darstellungsart der Functionen ζ.

Jeder Curve $P(y, x) = 0$ entsprechen genau so viele Primtheiler $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}', \mathfrak{p}''$ als ihr Kugelflächen $R_\nu, R_{\nu'}, R_{\nu''}$ zugeordnet sind, speciell gehören auch zu den beiden unendlich fernen Geraden $\frac{1}{x} = 0$ und $\frac{1}{y} = 0$ gewisse Primtheiler p, welche die Verallgemeinerung der unendlich fernen Punkte in der Riemann'schen Theorie sind; dieselben sollen im Folgenden stets durch $\mathfrak{p}_{(\infty)}, \mathfrak{p}'_{(\infty)}, \ldots$ bezeichnet werden. Es liegt ferner auf der Hand, dass die hier eingeführten Primtheiler alle Eigenschaften der Primzahlen in der elementaren Zahlentheorie besitzen. Sind nämlich zwei Functionen ζ und ζ' bzw. durch $\mathfrak{p}^k$ und $\mathfrak{p}^{k'}$ genau theilbar, so ist ihr Product genau durch $\mathfrak{p}^{k+k'}$, ihr Quotient durch $\mathfrak{p}^{k-k'}$ theilbar. Eine Function ζ heisst dann durch das Product $\mathfrak{p}_1^{k_1}\mathfrak{p}_2^{k_2}$ von zwei verschiedenen Primtheilern theilbar, wenn sie sowohl durch $\mathfrak{p}_1^{k_1}$ als auch durch $\mathfrak{p}_2^{k_2}$ genau theilbar ist.

Ebenso wie jede algebraische Function von einer Variablen nur eine endliche Anzahl von Nullstellen und Polen auf der zugehörigen Riemann-schen Fläche hat, besitzt in unserer Theorie jede Function ζ nur eine endliche Anzahl von Primtheilern in einer positiven oder negativen Potenz.

Zum Beweise dieses wichtigen Satzes führt die folgende Überlegung: Es sei $P(y, x)$ eine beliebige irreductible Function, $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}', \mathfrak{p}''$ die zu P gehörigen Primtheiler und es möge die gegebene algebraische Function ζ genau durch das Product $\mathfrak{p}^k \mathfrak{p}'^{k'} \mathfrak{p}''^{k''}$ theilbar sein. Ist dann:

$$N(\zeta) = \zeta_1 \zeta_2 \ldots \zeta_n = B_0(xy)$$

die Norm von ζ, so enthält diese rationale Function von x und y den zugehörigen Factor $P(y, x)$ genau in der Potenz

$$P(xy)^{k\lambda + k'\lambda' + k''\lambda''}.$$

Enthält nämlich ζ die Potenz $\mathfrak{p}^k$, so beginnen alle λb zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Reihen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{\lambda b}$ genau mit $(y-y_0)^{\frac{k}{b}}$, ihr Product also mit $(y-y_0)^{k\lambda}$ und das Entsprechende gilt für die Divisoren $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}''$; also beginnt das Product *aller n* Reihen genau mit $(y-y_0)^{k\lambda+k'\lambda'+k''\lambda''}$ und dies ist dann und nur dann der Fall, wenn die Function $B_0(xy)$ dieselbe Potenz von P als Factor enthält.

Es sei jetzt ζ zunächst eine ganze algebraische Function, so dass alle ihre Gleichungscoefficienten, speciell also auch ihre Norm *ganze* Functionen von x und y sind. Eine solche Function ist dadurch characterisirt, dass sie nur die Divisoren $\mathfrak{p}_\infty \mathfrak{p}'_\infty$ in negativen Potenzen enthalten kann; in der That war ja gezeigt worden, dass für eine beliebige ganze Function $P(y, x)$ keine der zugehörigen Entwickelungen von negativer Ordnung sein kann. Dann zeigt man leicht, dass ζ nur eine endliche Anzahl von Primfactoren enthält. Soll nämlich ζ irgend einen Primfactor $\mathfrak{p}$ auch nur in der ersten Potenz enthalten, so muss $N(\zeta) = B_0(xy)$ durch $P(xy)^\lambda$ theilbar sein. Nur den irreductiblen Factoren von $B_0(xy)$ können Primtheiler von ζ entsprechen und diesen entsprechen auch wirklich Divisoren von ζ. Um sie zu finden braucht man nur die Reihen $\zeta_1 \ldots \zeta_n$ aufzusuchen welche irgend einem Zweige von P entsprechen und die Ordnungszahlen jener Reihen festzustellen. Ausserdem hat man ζ noch in Bezug auf die Geraden $\frac{1}{x} = 0$ und $\frac{1}{y} = 0$ und die zugehörigen Primfactoren $\mathfrak{p}_{(\infty)}$, $\mathfrak{p}'_{(\infty)}, \ldots, \mathfrak{p}^{(\rho)}_{(\infty)}$ zu untersuchen, was genau auf dieselbe Weise geschieht.

So erhält man einen völlig bestimmten Divisor

$$\vartheta = \mathfrak{p}_1^{k_1} \mathfrak{p}_2^{k_2} \ldots \mathfrak{p}_r^{k_r}$$

dem die ganze algebraische Zahl ζ in dem Sinne äquivalent gesetzt werden kann, als derselbe alle und nur die Primtheiler enthält, welche auch in ζ auftreten, und jeden ebenso oft, wie ζ. Dasselbe gilt für jede ganze rationale Function, die ja ebenfalls eine ganze algebraische Function ist.

Ist jetzt ζ eine gebrochene algebraische Function und genügt es der Gleichung:

$$a_n(xy)\zeta^n + a_{n-1}(xy)\zeta^{n-1} + \ldots + a_0(xy) = 0$$

so ist, wie schon im Anfang von § 4 erwähnt wurde,

$$\zeta = \frac{\bar{\zeta}}{a_n(xy)},$$

wo $\bar{\zeta}$ eine ganze algebraische Function bedeutet, also äquivalent einem bestimmten Divisor $\bar{\vartheta}$ ist. Ebenso kann aber auch die ganze rationale Function $a_n(xy)$ in ihre Primdivisoren zerlegt werden, auch sie ist also einem anderen Divisor $\bar{\vartheta}_1$ äquivalent, und hieraus sowie nach den Fundamentaleigenschaften der Divisoren folgt dass

$$\zeta \sim \frac{\bar{\vartheta}}{\bar{\vartheta}_1},$$

dass also jede ganze und auch jede gebrochene Grösse des Körpers $K(x, y, z)$ einem und nur einem Divisor ϑ äquivalent ist.

Durch ihren Divisor ist eine algebraische Function bis auf eine multiplicative Constante bestimmt. Sind nämlich zwei Grössen ζ und ζ' demselben Divisor ϑ äquivalent, so ist ihr Quotient

$$\varepsilon = \frac{\zeta}{\zeta'} \sim \frac{\vartheta}{\vartheta} \sim 1$$

und ich zeige nun dass eine algebraische Grösse ε, welche äquivalent Eins ist, nothwendig eine Constante sein muss.

Ist die algebraische Function $\varepsilon \sim 1$, so gilt dasselbe von $\frac{1}{\varepsilon}$, und beide sind zunächst *ganze* algebraische Functionen, da sie keine endlichen Primtheiler in negativer Potenz enthalten. Hieraus folgt dass ε einer Gleichung von der Form genügt:

$$(1) \qquad \varepsilon^n + g_{n-1}(xy)\varepsilon^{n-1} + \ldots + g_1(xy)\varepsilon + \gamma_0 = 0$$

wo γ_0 eine Constante bedeutet, und alle $g_i(xy)$ ganze Functionen von x und y, denn nur dann ist auch $\frac{1}{\varepsilon}$ durch die Gleichung:

$$\gamma_0\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n + g_1(xy)\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-1} + \ldots + 1 = 0$$

ebenfalls als *ganze* algebraische Function definirt. Aber auch alle Coefficienten $g_i(xy)$ müssen sowohl in Bezug auf x als auf y vom nullten Grade, d. h. sie müssen ebenfalls Constanten sein. Um dies zu zeigen, betrachte ich die n Wurzeln $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ in der Umgebung der unendlich fernen Geraden $\frac{1}{y} = 0$, und bestimme durch das allgemeine Verfahren ihre Ord-

nungszahlen. Alle diese Ordnungszahlen müssen aber Null sein, denn sonst würde ja ε mindestens einen der zu $\frac{1}{y} = 0$ gehörigen Primfactoren $\mathfrak{p}_\infty$ enthalten, also nicht äquivalent Eins sein. Dieser Bedingung wird offenbar dann und nur dann genügt, wenn die Ordnungszahl ε_0 der Wurzel höchster Ordnung gleich Null ist. Aus dem im § 4 bewiesenen Satze folgt aber, dass diese Ordnungszahl durch die Gleichung bestimmt ist:

$$\varepsilon_0 = Max\left(\frac{\rho_0 - \rho_s}{s}\right),$$

wo $\rho_0, \rho_1, \ldots \rho_n$ die Ordnungszahlen der Gleichungscoefficienten $g_i(xy)$ in Bezug auf $\frac{1}{y}$ sind. Dieselben haben die Werthe:

$$\rho_0 = \rho_n = 0, \qquad \rho_i = -r_i, \qquad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

wo r_i den Grad des Coefficienten $g_i(x, y)$ in Bezug auf y bedeutet, also sicher eine nicht negative Zahl ist. Also ist

$$\varepsilon_0 = Max\left(\frac{r_s}{s}\right)$$

und dieser Maximalwerth ist dann und nur dann Null, wenn alle Coefficienten $g_i(xy)$ in Bezug auf y den Grad $r_i = 0$ haben, also y gar nicht enthalten. Genau ebenso zeigt man, dass alle Coefficienten auch von x unabhängig sind, dass sie sich also auf Constanten reduciren. Es genügt also ε einer Gleichung mit Zahlcoefficienten:

$$\varepsilon^n + \gamma_{n-1}\varepsilon^{n-1} + \ldots + \gamma_0 = 0,$$

ist also selbst eine Constante; es werde beiläufig bemerkt dass jene Gleichung lauter gleiche Wurzeln besitzen muss, weil ε dem Körper $K(x,y,z)$ angehört.

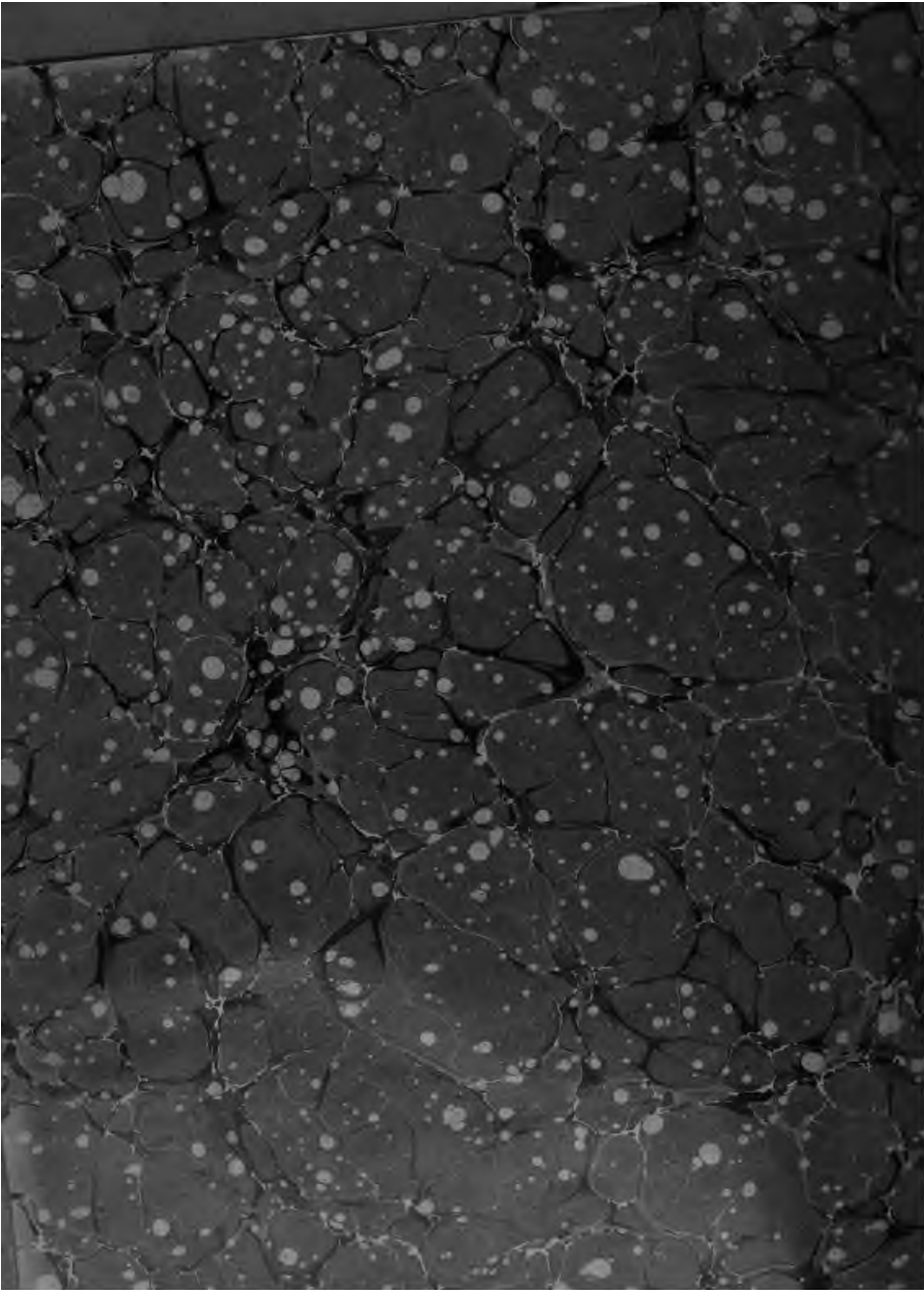
Eine jede algebraische Function von zwei Variablen ist also durch ihren Divisor $\mathfrak{d}$ in genau derselben Weise bis auf einen constanten Factor bestimmt, wie in der Riemann'schen Theorie eine Function durch ihre Nullstellen und Pole vollständig fixirt ist. Fasst man in $\mathfrak{d}$ das Product aller Primfactoren mit positiven Exponenten zu einem Zähler, die übrigen

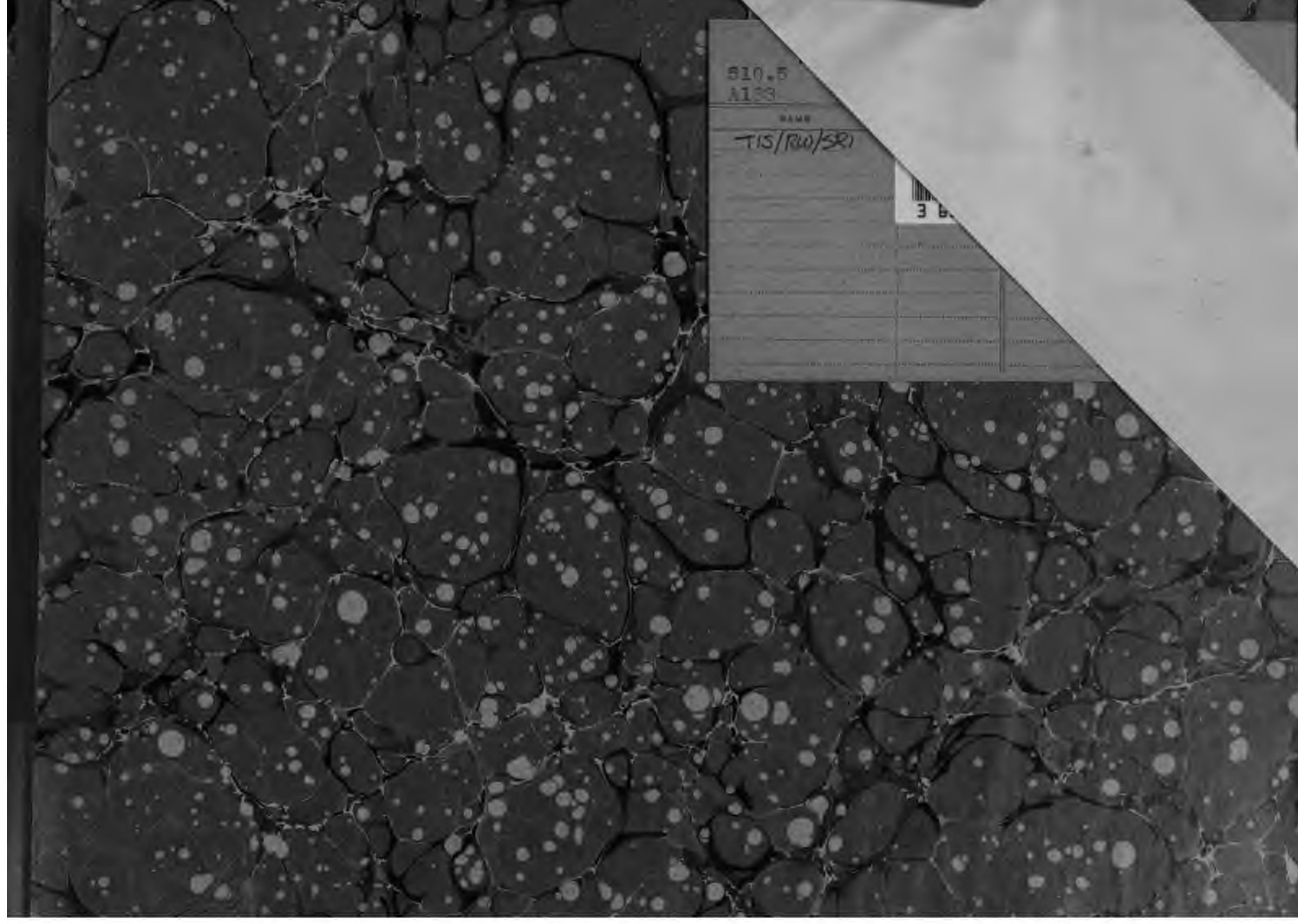
mit negativen Exponenten zu einem Nenner zusammen, so erhält man für jedes ζ eine Äquivalenz

$$\zeta \sim \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{n}},$$

wo $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{n}$ *ganze* Divisoren bedeuten; auf den zu $\mathfrak{z}$ gehörigen Riemannschen Flächen ist ζ von positiver, auf den zu $\mathfrak{n}$ gehörigen von negativer Ordnung, der Zähler repräsentirt geometrisch die Nullcurven, der Nenner die Polcurven von ζ.

Auf die in dieser Arbeit gefundenen Resultate kann man nun eine vollständige arithmetisch strenge Theorie der algebraischen Functionen von zwei Variablen oder der algebraischen Flächen gründen, und diese dann auf die Theorie der algebraischen Integrale anwenden, welche in neuerer Zeit von anderen Grundlagen aus durch Herrn Picard erfolgreich behandelt worden ist; dieselbe bietet nunmehr keine wesentlich grösseren Schwierigkeiten als die entsprechende für Functionen einer Variablen; ich habe diese Untersuchungen bereits durchgeführt und werde ihre Resultate in einer späteren Arbeit veröffentlichen.




810.5

